TEORIA MIARY I CAŁKI

WYKŁAD

Literatura

0.1. **Literatura podstawowa.**

- Rudin "Analiza rzeczywista i zespolona", rozdziały 1, 2, 3 i 6
- Rudin "Podstawy analizy matematycznej", rozdział 11
- Bass "Real Analysis for Graduate Students: Measure and Integration Theory" http://bass.math.uconn.edu/3rd.pdf rozdziały 1-11, 13, 15.
- Łojasiewicz "Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych", rozdziały 4,5 i 6.
- Sikorski "Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje wielu zmiennych" rozdziały 6, 7 i 8
- Birkholc "Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych" rozdział 4

0.2. **Literatura uzupełniająca.**

- Kaczor, Nowak "Zadania z analizy matematycznej, tom 3" podrozdziały 2.1, 2.2 i 2.3
- Billingsley "Prawdopodobieństwo i miara", rozdziały 2, 3, 10-13, 15-18
- Halmos "Measure Theory"

1. Przykłady wprowadzające

- Najogólniej, miara to funkcja która danemu zbiorowi przyporządkowuje pewną liczbę (nieujemną)
- Dziedzina tej funkcji to "klasa zbiorów mierzalnych"
- Jakie własności powinna mieć dziedzina (tzn. jakie zbiory umiemy mierzyć), a jakie sama funkcja będąca miarą?

1.1. **Przykłady używanych miar.**

- długość (odległość)
- pole, objętość
- masa
- czas
- prawdopodobieństwo

1.2. **Własności sensownych miar.**

- jeśli potrafimy zmierzyć dany zbiór, to potrafimy zmierzyć jego dopełnienie;
- jeśli potrafimy zmierzyć dwa zbiory, to potrafimy zmierzyć ich sumę, iloczyn i różnicę;
- miara sumy zbiorów **rozłącznych** jest równa sumie miar;
- jeśli miara "całości" jest skończona, to miara dopełnienia zbioru jest równa miara "całości" minus miara tego zbioru;
- miara sumy to suma miar minus miara części wspólnej;
- miara podzbioru jest nie większa niż miara zbioru.

2. Ciała i sigma–ciała zbiorów

Niech X będzie dowolnym zbiorem. Przez $\mathcal{P}(X)$ oznaczamy rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X. Przez A^c oznaczamy dopełnienie zbioru A.

Definicja 2.1. Niepustą rodzinę $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy ciałem podzbiorów zbioru X jeśli spełnia ona następujące trzy warunki:

(i) $\varnothing \in \mathcal{S}$;
(ii) jeżeli $A \in \mathcal{S}$, to $A^c \in \mathcal{S}$;
(iii) jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$, to $A, B \in \mathcal{S}$.

Warunek (iii) można zastąpić warunkiem:

(iv) jeżeli $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$, to $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{S}$.

Definicja 2.2. Niepustą rodzinę $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy σ–ciałem podzbiorów zbioru X jeśli spełnia ona następujące trzy warunki:

(i') $\varnothing \in \mathcal{S}$;
(ii') jeżeli $A \in \mathcal{S}$, to $A^c \in \mathcal{S}$;
(iii') jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$, to $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{S}$.

Definicja 2.3. Jeżeli $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ jest σ–ciałem, to parę $(X, \mathcal{S})$ nazywamy *przestrzenią mierzalną*, a elementy σ–ciała $\mathcal{S}$ nazywamy *zbiorami mierzalnymi.*

Przykład 1. Przykłady σ–ciał:

(a) Jeżeli X jest dowolnym zbiorem, to $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$ jest ciałem oraz σ–ciałem.
(b) Jeżeli X jest dowolnym zbiorem, to $\mathcal{S} = \{\varnothing, X\}$ jest ciałem oraz σ–ciałem.
(c) Jeżeli X jest dowolnym zbiorem oraz $E \subset X$ jest dowolnym podzbiorem X, to

$$\mathcal{S} = \{\varnothing, E, E^c, X\}$$

jest ciałem oraz σ–ciałem.

Oczywiście każde σ–ciało jest ciałem (wystarczy przyjąć $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = A_4 = \ldots = \varnothing$), ale nie każde ciało jest σ–ciałem.

Przykład 2. Niech $X = \mathbb{R}$ oraz $\mathcal{A}$ oznacza rodzinę skończonych sum przedziałów postaci $(a, b]$, gdzie $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$. Zatem $A \in \mathcal{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $n \in \mathbb{N}$ oraz $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ takie, że $-\infty \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \dots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant +\infty$ oraz

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i].$$

Wtedy $\mathcal{A}$ jest ciałem (ćw.), ale jeżeli $A_n = (2n, 2n+1]$, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathcal{A}$, a więc $\mathcal{A}$ nie jest σ–ciałem.

Następne twierdzenia pokazuje, że skończone operacje teoriomnogościowe na zbiorach ciała dają wyniku zbiór należący do tego samego ciała.

Twierdzenie 2.4. *Niech $\mathcal{S}$ będzie dowolnym ciałem. Jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$, to*

(a) $A \cap B \in \mathcal{S}$;
(b) $A \setminus B \in \mathcal{S}$;
(c) $A \triangle B \in \mathcal{S}$.

Dowód. (a) Jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$, to $A^c, B^c \in \mathcal{S}$, a więc $A^c \cup B^c \in \mathcal{S}$. Mamy

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c,$$

a więc $A \cap B \in \mathcal{S}$.
(b) oraz (c) dowodzimy analogicznie. □

Dla σ–ciał dopuszczalne są także operacje przeliczalne.

Twierdzenie 2.5. *Niech $\mathcal{S}$ będzie dowolnym σ–ciałem. Jeżeli $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$, to*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}.$$

Dowód.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c$$ □

Powyższe dwa twierdzenia można krótko podsumować mówiąc, że skończone lub przeliczalne operacje teoriomnogościowe na zbiorach mierzalnych dają w wyniku zbiory mierzalne.

Można podać różne definicje równoważne ciała i σ–ciała. Na przykład

Twierdzenie 2.6. *Niepusta rodzina $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki*

(a) jeśli $A, B \in \mathcal{S}$, to $A \setminus B \in \mathcal{S}$;
(b) jeśli $A, B \in \mathcal{S}$, to $A \cup B \in \mathcal{S}$.

Dowód. (ćwiczenie.) □

Twierdzenie 2.7. *(a) Jeżeli $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{P}(X)$ są ciałami, to $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ jest również ciałem. (b) Jeżeli $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{P}(X)$ są σ–ciałami, to $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ jest również σ–ciałem.*

Dowód. Udowodnimy punkt (a), dowód (b) jest analogiczny.

Niech $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$, a więc

$$A \in \mathcal{S} \Leftrightarrow A \in \mathcal{S}_1 \text{ oraz } A \in \mathcal{S}_2.$$

Sprawdzamy warunki z definicji ciała.

- Mamy $\varnothing \in \mathcal{S}_1$ oraz $\varnothing \in \mathcal{S}_2$, a więc $\varnothing \in \mathcal{S}$.
- Dalej, jeżeli $A \in \mathcal{S}$, to $A \in \mathcal{S}_1$ oraz $A \in \mathcal{S}_2$, a więc $A^c \in \mathcal{S}_1$ oraz $A^c \in \mathcal{S}_2$. Zatem $A^c \in \mathcal{S}$.
- Ponadto, jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$, to $A, B \in \mathcal{S}_1$ oraz $A, B \in \mathcal{S}_2$. Zatem $A \cup B \in \mathcal{S}_1$ oraz $A \cup B \in \mathcal{S}_2$. Zatem $A \cup B \in \mathcal{S}$, czyli $\mathcal{S}$ jest ciałem. □

Podobnie dowodzimy, że iloczyn dowolnej ilości σ–ciał jest σ–ciałem.

Twierdzenie 2.8. *Jeżeli T jest dowolnym zbiorem oraz $\mathcal{S}_t \subset \mathcal{P}(X)$ jest σ–ciałem dla każdego $t \in T$, to*

$$\mathcal{S} := \bigcap_{t \in T} \mathcal{S}_t$$

jest również σ–ciałem.

Dowód. Z definicji iloczynu zbiorów mamy

$$x \in \bigcap_{t \in T} A_t \Leftrightarrow \forall_{t \in T}\ x \in A_t$$

Dla każdego $t \in T$ mamy $\varnothing \in A_t$, a więc $\varnothing \in \bigcap_t \mathcal{S}_t$.

Załóżmy, że $E \in \mathcal{S}$. Wtedy $E \in \mathcal{S}_t$, a więc również $E^c \in \mathcal{S}_t$ dla każdego $t \in T$. Zatem $E^c \in \mathcal{S}$.

Załóżmy, że $E_i \in \mathcal{S}$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots$. Wtedy dla każdego ustalonego t mamy $E_i \in \mathcal{S}_t$, a więc również

$$\bigcup_i E_i \in \mathcal{S}_t.$$

Zatem

$$\bigcup_i E_i \in \mathcal{S}.$$

□

Definicja 2.9. Niech $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ będzie dowolną rodziną podzbiorów zbioru X. Przez $\sigma(\mathcal{K})$ oznaczamy najmniejsze σ–ciało zawierające rodzinę $\mathcal{K}$.

Operacja $\sigma(\mathcal{K})$ jest zawsze dobrze określona, gdyż $\mathcal{P}(X)$ jest σ–ciałem zawierającym $\mathcal{K}$ oraz na podstawie poprzedniego twierdzenia iloczyn wszystkich σ–ciał zawierających rodzinę $\mathcal{K}$ jest σ–ciałem.

Wniosek 2.10.

(a) *Jeżeli* $\mathcal{S}$ *jest* σ*–ciałem, to* $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

(b) *Jeżeli* $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$*, to* $\sigma(\mathcal{K}_1) \subset \sigma(\mathcal{K}_2)$.

(c) *Jeżeli* $\mathcal{S}$ *jest* σ*–ciałem oraz* $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$*, to* $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{S}$.

3. Zbiory borelowskie

Rozważmy najpierw przypadek $X = \mathbb{R}$. Niech $\mathcal{G}$ oznacza rodzinę zbiorów otwartych w $\mathbb{R}$. Przypomnijmy, że $A \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy A jest sumą przeliczalnej ilości rozłącznych przedziałów otwartych:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i).$$

Definicja 3.1. σ–ciało $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$ definiujemy jako

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{G}).$$

Elementy $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ nazywamy zbiorami borelowskimi w $\mathbb{R}$.

Przykład 3. Przykłady zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$:

- Przedziały postaci (a, b), $(-\infty, b)$ lub $(a, +\infty)$ są zbiorami otwartymi w $\mathbb{R}$, a więc są zbiorami borelowskimi.
- Przedziały $(-\infty, b]$ lub $[a, +\infty)$ są zbiorami borelowskimi, gdyż na przykład
$$(-\infty, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\infty, b + \frac{1}{n}\right), \quad [a, +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, +\infty\right).$$
- Przedziały $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ są zbiorami borelowskimi, gdyż na przykład
$$(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a, b + \frac{1}{n}\right)$$
lub
$$(a, b] = (a, +\infty) \setminus (b, +\infty)$$
- Każdy zbiór jednopunktowy $\{a\}$ jest borelowski, a więc każdy przeliczalny podzbiór jest borelowski. W szczególności $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ są borelowskie w $\mathbb{R}$.

Uwaga. 1. Łatwo pokazać, że najmniejsze σ–ciało zawierające wszystkie przedziały to $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, a więc jest to najmniejsze nietrywialne σ–ciało. Istotnie, niech na przykład

$$\mathcal{C} = \{(a, b) : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Wtedy $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ a więc $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{G}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Z drugiej strony każdy zbiór należący do $\mathcal{G}$ jest sumą przeliczalnej ilości przedziałów otwartych. Każdy skończony przedział otwarty należy do $\mathcal{C}$, a każdy nieskończony można zapisać jako sumę przedziałów należących do $\mathcal{C}$

$$(a, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a, a + n).$$

a więc $(a, \infty) \in \sigma(\mathcal{C})$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$, i podobnie $(-\infty, b) \in \sigma(\mathcal{C})$ dla każdego $b \in \mathbb{R}$. Zatem, jeśli G jest zbiorem otwartym, to $G \in \sigma(\mathcal{C})$. Inaczej $\mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{C})$, a więc

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{G}) \subset \sigma(\mathcal{C}).$$

Podobnie można wykazać, że następujące rodziny przedziałów generują $\mathscr{B}(\mathbb{R})$: jeżeli

$$\mathcal{C}_1 = \{(a, b] : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{C}_2 = \{[a, b) : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{C}_3 = \{(a, +\infty) : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

to

$$\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma(\mathcal{C}_3) = \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Wynika stąd, że ciało $\mathcal{A}$ skończonych sum przedziałów postaci $(a, b]$ z Przykładu 2 również generuje $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, to znaczy $\sigma(\mathcal{A}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

2. Można pokazać $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ jest mocy continuum, a więc istnieje bardzo dużo zbiorów, które nie sa borelowskie w $\mathbb{R}$. Z drugiej strony dość trudno skonstruować zbiór, który nie jest borelowski.

Niech teraz X będzie dowolną przestrzenią metryczną (lub ogólniej topologiczną) i niech $\mathcal{G}$ oznacza rodzinę zbiorów otwartych w X.

Definicja 3.2. σ–ciało zbiorów borelowskich w X określamy jako $\mathscr{B}(X) = \sigma(\mathcal{G})$.

W szczególności oznaczamy $\mathscr{B}_n = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

Przykład 4. Inne przykłady zbiorów borelowskich:

- zbiory otwarte w X są borelowskie z definicji, a więc zbiory domknięte w X są borelowskie jako dopełnienia zbiorów otwartych;
- Koła, prostokąty, trójkąty, wielokąty itd. są zbiorami borelowskimi na płaszczyźnie.
- Kule, sześciany, ostrosłupy, graniastosłupy itd są zbiorami borelowskimi w przestrzeni.

4. Miary dodatnie

4.1. **Definicja i podstawowe własności miar.**

Definicja 4.1. Niech $(X, \mathcal{S})$ będzie przestrzenią mierzalną. Funkcję $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ mazywamy miarą dodatnią jeśli spełnia ona warunki:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) jeśli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$ oraz $A_i \cap A_j = \varnothing$ dla $i \neq j$, to

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Warunek (ii) powyższej definicji określamy inaczej jako *własność przeliczalnej addytywności.*

Definicja 4.2. Jeżeli X jest dowolnym zbiorem, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ jest σ–ciałem, a $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ jest miarą dodatnią, to trójkę $(X, \mathcal{S}, \mu)$ nazywamy *przestrzenią z miarą.*

Uwaga.

- Zauważmy, że miara jest określona tylko dla zbiorów mierzalnych (stąd ich nazwa).
- Miara dodatnia może przyjmować wartości nieskończone (np. miara Lebesgue'a lub miary z następnego przykładu).

Przykład 5. Przykłady miar:

(a) Niech X będzie dowolnym zbiorem, $\mathcal{S}$ zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru X oraz $\mu(A)$ oznacza liczbę elementów zbioru A. Wtedy $(X, \mathcal{S}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą. Tak określoną miarę nazywamy *miarą liczącą.*

(b) Niech $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{S}$ będzie zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$ oraz ustalmy $x_1, x_2, \ldots \in X$ i liczby nieujemne $a_1, a_2, \ldots \geqslant 0$. Określmy

$$\mu(A) = \sum_{\{i : x_i \in A\}} a_i.$$

(c) Niech X będzie dowolnym zbiorem, $\mathcal{S}$ zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru X, i ustalmy $x \in X$. Określmy miarę δ_x wzorem

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x \in A, \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin A. \end{cases}$$

Miarę tą nazywamy *miarą punktową* skupioną w punkcie x.

(d) Najważniejszym przykładem miary jest tzw. miara Lebesgue'a m_n określona na odpowiednim σ–ciele $\mathcal{L}_n$ podzbiorów przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ mierzalnych w sensie Lebesgue'a. W szczególności σ–ciało $\mathcal{L}_n$ zawiera wszystkie kostki n–wymiarowe, a miara takiej kostki jest równa jej n–wymiarowej objętości. Na przykład,

$$m_1([a, b]) = b - a,$$

oraz

$$m_2([a,b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c).$$

Zatem m_1 jest odpowiednikiem długości, m_2 jest odpowiednikiem pola, a m_3 odpowiada zwykłej objętości. Istnienie takiej miary jest dość trudnym problemem, i będzie wykazane w dalszej części.

Twierdzenie 4.3 (Własności miar)**.** *Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą.*

(a) Jeżeli $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ są zbiorami parami rozłącznymi, to

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

(tzw. skończona addytywność).

(b) Jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$ oraz $A \subset B$, to $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ (tzw. monotoniczność).

(c) Jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$ oraz $A \subset B$ i $\mu(A) < \infty$, to

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

(d) Jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$ oraz $\mu(A \cap B) < \infty$, to

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

(e) Jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$, to

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(tzw. przeliczalna podaddytywność)

(f) W szczególności, jeżeli $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$, to

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

(tzw. skończona podaddytywność).

Dowód. (a) Przyjmijmy w warunku (ii) definicji miary

$$A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \varnothing.$$

Skończona addytywność wynika teraz łatwo z równości $\mu(\varnothing) = 0$.

(b) Przyjmijmy w warunku (ii) definicji miary

$$A_1 = A, \quad A_2 = B \setminus A, \quad A_3 = A_4 = \ldots = \varnothing.$$

Zatem

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + 0 + 0 + \ldots \geqslant \mu(A).$$

(c) wynika łatwo z powyższego równania.

(d) Oczywiście $A \cap B \subset B$, a więc na mocy własności (c) mamy

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B \setminus (A \cap B)) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Ponadto, $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ oraz $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. Zatem

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

(e) Przyjmijmy

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \quad B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}), \quad n \geqslant 3.$$

Wtedy $B_n \subset A_n$ oraz $B_n \in \mathcal{S}$ dla każdego $n \geqslant 1$. Ponadto zbiory B_n, $n \geqslant 1$, są parami rozłączne oraz

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Korzystając teraz z przeliczalnej addytywności oraz monotoniczności miar otrzymamy

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(f) wynika z (d) po podstawieniu $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \varnothing$. □

Twierdzenie 4.4. *Jeżeli* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$ *jest ciągiem zbiorów wstępujących, tzn.* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, *to*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Dowód. Określmy

$$C_1 = A_1, \quad C_2 = A_2 \setminus A_1, \quad C_n = A_n \setminus A_{n-1} \quad n \geqslant 2.$$

Wtedy zbiory C_n są mierzalne, rozłączne oraz

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i = A_n, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Zatem

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right).$$ □

Twierdzenie 4.5. *Jeżeli* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$ *jest ciągiem zbiorów zstępujących, tzn.* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ *oraz* $\mu(A_1) < \infty$, *to*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Dowód. Wystarczy zastosować poprzednie twierdzenie do ciągu zbiorów

$$B_n = A_1 \setminus A_n, \quad n \geqslant 1,$$

Jest to wstępujący ciąg zbiorów mierzalnych, które w sumie dają zbiór $A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Na mocy Twierdzenia 3.1(c)

$$\mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

oraz

$$\mu(B_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n), \quad n \geqslant 1.$$

Na mocy poprzedniego twierdzenia

$$\mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \qquad \square$$

Definicja 4.6. Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Mówimy, że miara μ jest:

- *skończona*, jeżeli $\mu(X) < \infty$;
- σ–skończona, jeżeli istnieje ciąg zbiorów $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{S}$ taki, że $\mu(E_n) < \infty$ dla każdego $n \geqslant 1$ oraz $X = E_1 \cup E_2 \cup \ldots$;
- *miarą prawdopodobieństwa*, jeżeli $\mu(X) = 1$. Zwykle piszemy wtedy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zamiast $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

Przykład 6.

- Miara licząca na dowolnym zbiorze X jest miarą zupełną, jest ona skończona wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zbiorem skończonym, oraz σ–skończona wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zbiorem przeliczalnym.
- Miara Lebesgue'a na prostej jest σ–skończona; wystarczy rozważyć przedziały $E_n = [-n, n]$, $n \geqslant 1$.

4.2. **Zbiory miary zero i zupełność miar.** Omówimy teraz własności zbiorów, których miara jest zerowa.

Definicja 4.7. Jeżeli $A \in \mathcal{S}$ oraz $\mu(A) = 0$, to mówimy, że A jest *zbiorem miary zero.*

Zauważmy, że

- podzbiór zbioru miary zero nie musi być mierzalny, a więc nie musi być zbiorem miary zero, ale
- z nieujemności i monotoniczności miar wynika, że jeżeli A jest zbiorem miary zero, oraz $B \subset A$ i $B \in \mathcal{S}$, to również B jest zbiorem miary zero;
- z nieujemności i podaddytywności miar wynika, że suma skończonej lub przeliczalnej ilości zbiorów miary zero jest również zbiorem miary zero.

Twierdzenie 4.8. *Jeżeli* $A, B \in \mathcal{S}$ *oraz* $\mu(B) = 0$*, to*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) = \mu(A).$$

Inaczej "odjęcie lub dodanie zbioru miary zero nie zmienia miary zbioru początkowego".

Dowód. Skoro $A, B \in \mathcal{S}$, to $A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{S}$. Ponadto $A \cap B \subset B$, a więc $0 \leqslant \mu(A \cap B) \leqslant \mu(B) = 0$. Zatem

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) = \mu(A \cap B) = \mu(A).$$

Ponadto, $A \subset A \cup B$, a więc

$$\mu(A) \leqslant \mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B) = \mu(A),$$

gdyż $\mu(B) = 0$. Zatem $\mu(A \cup B) = \mu(A)$. □

Wniosek 4.9. *Załóżmy, że $A, B, E \in \mathcal{S}$ oraz $A \subset E \subset B$. Jeżeli $\mu(B \setminus A) = 0$, to $\mu(E) = \mu(A) = \mu(B)$.*

Definicja 4.10. Mówimy, że miara μ jest *zupełna*, jeżeli każdy podzbiór zbioru miary zero jest mierzalny (a więc musi mieć miarę zero).

Na przykład miara Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$ na σ–ciele zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a jest miarą zupełną. Pokażemy teraz, że każdą miarę na dowolnej przestrzeni mierzalnej można uzupełnić.

Twierdzenie 4.11. *Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Oznaczmy przez $\bar{\mathcal{S}}$ rodzinę zbiorów $E \subset X$ dla których istnieją zbiory $A, B \in \mathcal{S}$ takie, że $A \subset E \subset B$ oraz $\mu(B \setminus A) = 0$. Dla $E \in \bar{\mathcal{S}}$ określamy $\bar{\mu}(E) = \mu(A)$. Wtedy:*

(a) klasa $\bar{\mathcal{S}}$ jest σ–ciałem takim, że $\mathcal{S} \subset \bar{\mathcal{S}}$;
(b) wartości $\bar{\mu}$ nie zależą od wyboru zbiorów A i B;
(c) $\bar{\mu}$ jest miarą dodatnią na $\bar{\mathcal{S}}$ taką, że $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$ dla $A \in \mathcal{S}$;
(d) $\bar{\mu}$ jest miarą zupełną na $\bar{\mathcal{S}}$.

Miarę $\bar{\mu}$ nazywamy *uzupełnieniem miary* μ, a σ–ciało $\bar{\mathcal{S}}$ nazywamy *uzupełnieniem σ–ciała* $\mathcal{S}$ względem miary μ.

Dowód.

(a) Dla każdego $E \in \mathcal{S}$ mamy $E \subset E \subset E$ oraz $\mu(E \setminus E) = \mu(\varnothing) = 0$. Zatem jeżeli $E \in \mathcal{S}$, to $E \in \bar{\mathcal{S}}$. W szczególności $\varnothing \in \bar{\mathcal{S}}$.

Załóżmy, że $E \in \bar{\mathcal{S}}$, a więc $A \subset E \subset B$, gdzie $A, B \in \mathcal{S}$ oraz $\mu(B \setminus A) = 0$. Wtedy $B^c \subset E^c \subset A^c$ oraz $A^c, B^c \in \mathcal{S}$. Ponadto $A^c \setminus B^c = B \setminus A$, a więc $\mu(A^c \setminus B^c) = 0$. Zatem $E^c \in \bar{\mathcal{S}}$.

Załóżmy, że $E_i \in \bar{\mathcal{S}}$ dla $i = 1, 2, \ldots$. Wtedy dla każdego $i = 1, 2, \ldots$ istnieją zbiory $A_i, B_i \in \mathcal{S}$ takie, że $A_i \subset E_i \subset B_i$ oraz $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$. Oczywiście,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \tag{1}$$

oraz
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(B_i \setminus A_i).$$
Zatem
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(B_i \setminus A_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i \setminus A_i) = 0.$$
Stąd $\bigcup E_i \in \bar{\mathcal{S}}$, czyli $\bar{\mathcal{S}}$ jest σ–ciałem.

(b) Przypuśćmy, że $E \in \bar{\mathcal{S}}$, przy czym $A_i \subset E \subset B_i$ oraz $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$ dla $i = 1, 2$. Zgodnie z definicją $\bar{\mu}$ mamy wtedy $\bar{\mu}(E) = \mu(A_1)$ oraz $\bar{\mu}(E) = \mu(A_2)$. Aby funkcja $\bar{\mu}$ była porawnie określona musi zachodzić $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. Mamy $A_1 \subset B_2$, a więc
$$A_1 \setminus A_2 \subset B_2 \setminus A_2$$
czyli $\mu(A_1 \setminus A_2) = 0$. Podobnie $\mu(A_2 \setminus A_1) = 0$. Zatem
$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_2).$$

(c) Jeżeli $A \in \mathcal{S}$, to $A \in \bar{\mathcal{S}}$ oraz oczywiście $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$. W szczególności $\bar{\mu}(\varnothing) = 0$.

Jeżeli $E_i \in \bar{\mathcal{S}}$, $i = 1, 2, \ldots$ jest ciągiem zbiorów parami rozłącznych to odpowiadające zbiory A_i, $i = 1, 2, \ldots$ są również parami rozłączne. Zatem korzystając z własności (1)
$$\bar{\mu}\left(\bigcup_i E_i\right) = \mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i) = \sum_i \bar{\mu}(E_i),$$
a więc $\bar{\mu}$ jest przeliczalnie addytywna na $\bar{\mathcal{S}}$.

(d) Przypuścmy, że $E \in \bar{\mathcal{S}}$, gdzie $\bar{\mu}(E) = 0$ oraz $F \subset E$. Musimy pokazać, że $F \in \bar{\mathcal{S}}$. Mamy $A \subset E \subset B$ gdzie $\mu(B \setminus A) = 0$, a ponadto w tym przypadku $\mu(B) = \mu(A) = 0$. W szczególności $\varnothing \subset F \subset B$ oraz $\mu(B \setminus \varnothing) = \mu(B) = 0$. Zatem $F \in \bar{\mathcal{S}}$ oraz $\bar{\mu}(F) = 0$. $\square$

5. Miara Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$

Najważniejszym nietrywialnym przykładem miary jest miara Lebesgue'a m_n określona na σ–ciele $\mathscr{L}_n$ zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a w przestrzeni n–wymiarowej $\mathbb{R}^n$.

W dalszym ciągu będziemy stosować następujące oznaczenie. Dla danego zbioru $B \subset \mathbb{R}^n$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$ oznaczmy

$$B + x = \{y + x : y \in B\}.$$

Jest to tzw. przesunięcie zbioru B o wektor x.

Twierdzenie 5.1. *Istnieją σ–ciało $\mathscr{L}_n$ podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz miara dodatnia $m_n : \mathscr{L}_n \to [0, \infty]$ o następujących własnościach:*

(a) $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{L}_n$, ale $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \neq \mathscr{L}_n \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$;

(b) dla każdej kostki w $\mathbb{R}^n$ postaci

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

mamy

$$m_n(P) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n);$$

(c) miara m_n jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia, tzn. dla dowolnych $A \in \mathscr{L}_n$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$m_n(A + x) = m(A);$$

(d) m_n jest miarą zupełną.

W szczególności m_1 jest odpowiednikiem długości na prostej; m_2 jest odpowiednikiem pola na płaszczyźnie, a m_3 jest odpowiednikiem objętości w przestrzeni.

5.1. **Zbiory miary Lebesgue'a zero.** Niech m oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$. Rozważmy najpierw dowolny zbiór jednopunktowy $\{a\}$. Mamy

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a\right],$$

a więc na mocy Twierdzenia 4.5 mamy

$$m(\{a\}) = \lim_n m\left(\left(a - \frac{1}{n}, a\right]\right) = \lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

Zatem $m(\{a\}) = 0$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$. Wynika stąd łatwo, że każdy zbiór skończony oraz każdy zbiór przeliczalnym na miarę Lebesgue'a zero. W szczególności $m(\mathbb{Q}) = 0$. Istnieją jednak również zbiory nieprzeliczalne, których miara wynosi zero. Przykładem takiego zbioru jest *zbiór Cantora*.

5.2. **Przykład zbioru niemierzalnego w sensie Lebesgue'a.** Dla $x, y \in \mathbb{R}$ określmy

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Łatwo pokazać, że jest to relacja równoważności w $\mathbb{R}$ (ćw.), a więc dzieli zbiór $\mathbb{R}$ na rozłączne klasy abstrakcji, które w sumie dają cały zbiór $\mathbb{R}$. Każda klasa abstrakcji ma niepusty iloczyn z przedziałem $[0, 1]$, więc na mocy aksjomatu wyboru z każdej klasy abstrakcji wybieramy dokładnie jeden punkt z przedziału $[0, 1]$. Niech A oznacza zbiór wszystkich wybranych punktów. Pokażemy, że A *nie jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a.*

Uwaga. Klasa abstrakcji każdego $x \in \mathbb{R}$ jest zbiorem przeliczalnym, a więc klas abstrakcji musi być nieprzeliczalnie wiele (w przeciwnym razie $\mathbb{R}$ byłby przeliczalny co nie jest prawdą). Zatem A jest zbiorem nieprzeliczalnym.

Zauważmy teraz, że z definicji zbioru A zbiory $A + q$ są rozłączne dla różnych wartości $q \in \mathbb{Q}$. Ponadto (ćw.)

$$[0, 1] \subset \bigcup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (A + q) \subset [-1, 2].$$

Gdyby zbiór A był mierzalny, oraz $m(A) = c$, to również $m(A + q) = c$, a więc z poprzedniego zawierania otrzymujemy

$$1 \leqslant \sum_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} c \leqslant 3.$$

Ale pierwsza nierówność implikuje $c > 0$, a druga $c = 0$. Sprzeczność.

6. Funkcje mierzalne

Niech $(X, \mathcal{S})$ będzie przestrzenią mierzalną.

Definicja 6.1. Mówimy, że $f : X \to \mathbb{R}$ jest *funkcją $\mathcal{S}$–mierzalną* jeżeli dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\} \in \mathcal{S}.$$

Inaczej: dla każdego $a \in \mathbb{R}$ mamy $f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{S}$.

Uwaga. Klasa funkcji mierzalnych nie zależy od jakiejkolwiek miary, zależy natomiast od σ–ciała $\mathcal{S}$. Jeżeli $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ oraz f jest $\mathcal{S}_1$–mierzalna, to jest oczywiście $\mathcal{S}_2$–mierzalna, ale niekoniecznie na odwrót.

Przykład 7. Przykłady funkcji mierzalnych:

(a) Funkcja stała jest mierzalna: jeżeli $f(x) = c$ dla każdego $x \in X$, to

$$f^{-1}((a, +\infty)) = \begin{cases} \varnothing, & \text{jeżeli } a \geqslant c, \\ X, & \text{jeżeli } a < c. \end{cases}$$

(b) Dla ustalonego $A \subset X$ określmy

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x \in A, \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin A. \end{cases}$$

Zauważmy, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x : f(x) > a\}$ jest równy $\varnothing$, X lub A. Zatem f jest $\mathcal{S}$–mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in \mathcal{S}$.

Twierdzenie 6.2. *Dla dowolnej funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ następujące warunki są równoważne:*

(a) $\{x : f(x) > a\} \in \mathcal{S}$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$;

(b) $\{x : f(x) \geqslant a\} \in \mathcal{S}$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$;

(c) $\{x : f(x) < a\} \in \mathcal{S}$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$;

(d) $\{x : f(x) \leqslant a\} \in \mathcal{S}$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$;

(e) $\{x : f(x) \in B\} \in \mathcal{S}$ dla każdego $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Dowód. Równoważności (a) $\Leftrightarrow$ (d) oraz (b) $\Leftrightarrow$ (c) są oczywiste, bo $\mathcal{S}$ jest σ–ciałem. Na przykład

$$\{x : f(x) \leqslant a\} = (\{x : f(x) > a\})^c.$$

Dalej

$$\{x : f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) > a - \frac{1}{n}\right\},$$

a więc (a) $\Rightarrow$ (b). Ponadto

$$\{x : f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) \geqslant a + \frac{1}{n}\right\},$$

a więc (b) $\Rightarrow$ (a). Zatem (a) i (b) są równoważne, a więc (a), (b), (c) i (d) są równoważne.

Udowodnimy teraz równoważność (a) i (e).

Oczywiście (e) $\Rightarrow$ (a), bo każdy przedział (a, ∞) jest zbiorem borelowskim. Abu udowodnić, że (a) $\Rightarrow$ (e) określmy

$$\mathcal{G} = \left\{G \subset \mathbb{R} : f^{-1}(G) \in \mathcal{S}\right\}.$$

Korzystając z własności przeciwobrazów łatwo dowieść, że $\mathcal{G}$ jest σ–ciałem.

- $\varnothing \in \mathcal{G}$, bo $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{S}$;
- jeżeli $G \in \mathcal{G}$, to $f^{-1}(G) \in \mathcal{S}$, a więc

  $$f^{-1}(G^c) = \left(f^{-1}(G)\right)^c \in \mathcal{S},$$

  a więc $G^c \in \mathcal{G}$;
- jeżeli $G_i \in \mathcal{G}$, $i = 1, 2, \ldots$, to $f^{-1}(G_i) \in \mathcal{S}$ dla każdego i, oraz

  $$f^{-1}\left(\bigcup_i G_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(G_i) \in \mathcal{S},$$

  a więc $\bigcup_i G_i \in \mathcal{G}$.

Ponadto na mocy (a) rodzina $\mathcal{G}$ zawiera wszystkie przedziały postaci (a, ∞). Zatem $\mathcal{G} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. $\square$

Ostatnie twierdzenie mówi, że za definicję mierzalności funkcji można przyjąć dowolny z warunków (a)–(e). W szczególności warunek (e) mówi, że f jest funkcją mierzalną, jeżeli przeciwobraz każdego zbioru borelowskiego jest zbiorem mierzalnym.

Wniosek 6.3. *Jeżeli $f : X \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{S}$–mierzalna to dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$*

$$\{x : f(x) = a\} \in \mathcal{S}.$$

Twierdzenie 6.4. *Jeżeli X jest przestrzenią metryczną oraz $\mathscr{B}(X) \subset \mathcal{S}$, to każda funkcja ciągła $f : X \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{S}$–mierzalna.*

Dowód. Skoro f jest ciągła, a przedział (a, ∞) jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$, to $f^{-1}((a, \infty))$ jest otwarty w X. Zatem jest to zbiór mierzalny dla każdego a. $\square$

Przykład 8. Ciągłość nie jest konieczna do mierzalności. Na przykład funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

jest $\mathscr{B}(\mathbb{R})$–mierzalna (bo $\mathbb{Q} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$) oraz $\mathscr{L}$–mierzalna, ale jest nieciągła w każdym punkcie.

Twierdzenie 6.5. *Jeżeli f jest funkcją $\mathcal{S}$–mierzalną, to $|f|$ jest również funkcją $\mathcal{S}$–mierzalną.*

Dowód. Mamy $\{x : |f(x)| > a\} = \{x : f(x) > a\} \cup \{x : f(x) < -a\} \in \mathcal{S}$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$. $\square$

Twierdzenie 6.6. *Załóżmy, że $f, g : X \to \mathbb{R}$ są $\mathcal{S}$–mierzalne oraz $c \in \mathbb{R}$. Wtedy funkcje $f + g$, $-f$, cf, f^2, fg, $\max(f, g)$ oraz $\min(f, g)$ są $\mathcal{S}$–mierzalne.*

Dowód. Mamy

$$f(x) + g(x) < a \Leftrightarrow \exists_{r\in\mathbb{Q}}\ f(x) < r \wedge g(x) < a - r,$$

a więc

$$\{x : f(x) + g(x) < a\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \big(\{x : f(x) < r\} \cap \{x : g(x) < a - r\}\big) \in \mathcal{S},$$

bo $\mathbb{Q}$ jest zbiorem przeliczalnym.

Dalej $\{x : -f(x) > a\} = \{x : f(x) < -a\} \in \mathcal{S}$, a więc $-f$ jest mierzalna.

Jeżeli $c = 0$, to cf jest mierzalna jako funkcja stała. Jeżeli $c > 0$, to

$$\{x : cf(x) > a\} = \left\{x : f(x) > \frac{a}{c}\right\} \in \mathcal{S}.$$

Jeżeli $c < 0$, to $cf = -(|c|\, f)$, a więc musi być mierzalna.

Dalej, jeżeli $a < 0$, to $\{x : f^2(x) > a\} = X$, a jeżeli $a \geqslant 0$, to

$$\big\{x : f^2(x) > a\big\} = \big\{x : f(x) > \sqrt{a}\big\} \cup \big\{x : f(x) < -\sqrt{a}\big\} \in \mathcal{S},$$

a więc f^2 jest $\mathcal{S}$–mierzalna.

Ponadto

$$fg = \frac{1}{4}\left[(f + g)^2 - (f - g)^2\right]$$

a więc na podstawie tego co już dowiedliśmy musi to być funkcja mierzalna.

Mierzalność $\max(f, g)$ i $\min(f, g)$ wynika z równości

$$\{x : \max(f(x), g(x)) > a\} = \{x : f(x) > a\} \cup \{x : g(x) > a\}$$

oraz $\min(f, g) = -\max(-f, -g)$. $\square$

Wniosek 6.7. $\{x : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{S}$ *oraz* $\{x : f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{S}$

Zadanie 6.8. Jeżeli $f \neq 0$, to $1/f$ oraz g/f są funkcjami mierzalnymi.

Definicja 6.9. Dla dowolnej funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ określamy jej *część dodatnią* f^+ i *część ujemną* f^- wzorami

$$f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = -\min(f, 0) = \max(-f, 0).$$

Zauważmy, że

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Wniosek 6.10. *Jeżeli f jest mierzalna, to f^+ i f^- są mierzalne.*

Przypomnienie z analizy: jeżeli $\{a_n\}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych, to granicę górną i dolną określamy wzorami

$$\limsup_n a_n = \inf_{n \geqslant 1} \sup_{k \geqslant n} a_k$$

$$\liminf_n a_n = \sup_{n \geqslant 1} \inf_{k \geqslant n} a_k$$

Ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\limsup_n a_n = \liminf_n a_n$ a ich wspólną wartość nazywamy granicą ciągu $\{a_n\}$ i oznaczamy $\lim_n a_n$.

Twierdzenie 6.11. *Jeżeli $\{f_n\}$ jest ciągiem funkcji $\mathcal{S}$–mierzalnych, to*

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \limsup_n f_n, \quad \liminf_n f_n$$

są funkcjami $\mathcal{S}$–mierzalnymi.

Dowód. Mamy

$$\left\{x : \sup_n f_n(x) \leqslant a\right\} = \bigcap_n \{x : f_n(x) \leqslant a\} \in \mathcal{S},$$

a więc $\sup_n f_n$ jest funkcją mierzalną. Podobnie

$$\left\{x : \inf_n f_n(x) \geqslant a\right\} = \bigcap_n \{x : f_n(x) \geqslant a\} \in \mathcal{S}.$$

Mierzalność granicy górnej i dolnej wynika teraz z powyższego przypomnienia. □

Wniosek 6.12. *Jeżeli $\{f_n\}$ jest ciągiem funkcji $\mathcal{S}$–mierzalnych, zbieżnym punktowo do*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad x \in X,$$

to f jest funkcją $\mathcal{S}$–mierzalną.

Omówimy teraz bardzo ważną klasę funkcji mierzalnych, czyli tzw. *funkcje proste.*

Definicja 6.13. Niech $A \in \mathcal{S}$. Funkcję $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x \in A, \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin A, \end{cases}$$

nazywamy *funkcją charakterystyczną* zbioru A.

Wiemy już, że χ_A jest funkcją mierzalną wtedty i tylko wtedy, gdy $A \in \mathcal{S}$.

Niech $s : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, której zbiór wartości składa się z liczb $c_1, c_2, \ldots, c_n$ parami różnych (a więc s ma tylko skończenie wiele wartości). Niech

$$E_i = \{x : s(x) = c_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Wtedy

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x), \quad x \in X.$$

Zatem funkcja s jest $\mathcal{S}$–mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zbiory $E_1, \ldots, E_n$ są mierzalne.

Definicja 6.14. Mówimy, że funkcja $s : X \to \mathbb{R}$ powyższej postacji jest *funkcją prostą*, jeżeli zbiory $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{S}$.

Inaczej: funkcja prosta jest to skończona kombinacja liniowa funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych.

Twierdzenie 6.15. *Każda funkcja mierzalna nieujemna jest granicą niemalejącego ciągu funkcji prostych. Dokładniej, jeżeli $f : X \to [0, \infty)$ jest funkcją $\mathcal{S}$–mierzalną, to istnieje ciąg $\{s_n\}$ funkcji prostych $\mathcal{S}$–mierzalnych taki, że $s_1(x) \leqslant s_2(x) \leqslant \dots$ dla $x \in X$ oraz*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), \quad x \in X.$$

Dowód. Dla $n = 1, 2, \dots$ oraz $i = 1, 2, \dots, n2^n$ określmy

$$E_{ni} = \left\{ x : \frac{i-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}$$

oraz

$$F_n = \{x : f(x) \geqslant n\}.$$

Z mierzalności funkcji f wynika, że wszystkie zbiory E_{ni} oraz F_n są mierzalne, a więc jeżeli

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{ni}}(x) + n\chi_{F_n}(x)$$

to każda funkcja s_n jest funkcją prostą, i łatwo sprawdzić, że funkcje te mają żądane własności (ćw.) $\square$

Uwaga. Wiemy już, że dowolna funkcja mierzalna f daje się zapisać jako różnica dwóch nieujemnych funkcji mierzalnych $f = f^+ - f^-$, a zatem każda funkcja mierzalna jest granicą ciągu funkcji prostych (niekoniecznie monotonicznego).

7. Całka Lebesgue'a

7.1. **Definicja całki Lebesgue'a.** Kolejnym celem teorii miary i całki jest definicja pojęcia całki dla funkcji rzeczywistych określonych na dowolnych zbiorach. Całka Lebesgue'a jest uogólnieniem całki Riemanna znanej z analizy matematycznej, ma wszyskie jej własności, a także wiele nowych. Podstawową intuicją prowadzącą do pojęcia całki Lebesgue'a jest fakt, że całka funkcji nieujemnej określonej na przedziale powinna być równa polu pod wykresem funkcji.

Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą.

Definicja 7.1. Jeżeli s jest nieujemną funkcją prostą postaci

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i},$$

to określamy całkę Lebesgue'a funkcji s wzorem

$$\int s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i).$$

Uwaga. Przyjmujemy następującą umowę: jeżeli $c_i = 0$ oraz $\mu(E_i) = \infty$, to $c_i \mu(E_i) = 0$.

Przykład 9. Dla $E \in \mathcal{S}$ mamy

$$\int \chi_E\, d\mu = \mu(E),$$

oraz jeżeli $E_1, E_2 \in \mathcal{S}$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, $\mu(E_1), \mu(E_2) < \infty$ oraz $s = 2\chi_{E_1} - 3\chi_{E_2}$, to

$$\int s\, d\mu = 2\mu(E_1) - 3\mu(E_2).$$

Definicja 7.2. Jeżeli $f : X \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$, jest nieujemną funkcją mierzalną, to określamy jej całkę Lebesgue'a wzorem

$$\int f\, d\mu = \sup \left\{ \int s\, d\mu : \ 0 \leqslant s \leqslant f,\ s \text{ jest funkcją prostą} \right\}.$$

Uwaga. (a) Z mierzalności f wynika, że jest ona granicą niemalejąceo ciągu funkcji prostych, a więc powyższa definicja ma sens.

(b) Nie wykluczamy możliwości $\int f\, d\mu = \infty$.

(c) Łatwo sprawdzić, że dla funkcji prostej obydwie definicje dają tę samą wartość całki (ćw.).

Przypomnijmy, że dla dowolnej funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ określiliśmy jej część dodatnią i ujemną

$$f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = \max(-f, 0).$$

Wtedy $f = f^= - f^-$ oraz jeżeli f jest mierzalna, to f^+ i f^- również.

Definicja 7.3. Jeżeli $f : X \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją mierzalną, to określamy jej całkę Lebesgue'a wzorem

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$$

przy założeniu, że przynajmniej jedna z całek po prawej stronie jest skończona.

Definicja 7.4. Jeżeli f jest mierzalna oraz $\int |f|\, d\mu < \infty$, to mówimy, że f jest funkcją całkowalną i piszemy $f \in L^1(\mu)$.

Uwaga. Z uwagi na równość $|f| = f^+ + f^-$ mamy

$$\int f\, d\mu < \infty \Leftrightarrow \int |f|\, d\mu < \infty.$$

Zatem całka Lebesgue'a jest bezwględnie zbieżna.

Definicja 7.5. Jeżeli $E \in \mathcal{S}$ oraz $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją $\mathcal{S}$–mierzalną, to określamy całkę funkcji f po zbiorze E wzorem

$$\int_E f\, d\mu = \int f\chi_E\, d\mu.$$

Uwaga.

- Oczywiście $\int_X f\, d\mu = \int f\, d\mu$.
- W różnych podręcznikach stosuje się różne oznaczenia całki Lebesgue'a. Obok $\int f\, d\mu$ pojawia się również $\int f$ jeśli jasne jest względem jakiej miary całkujemy, albo $\int f(x)\, d\mu(x)$, albo nawet $\int f(x)\, \mu(dx)$.
- Jeżeli całkujemy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ względem miary Lebesgue'a m, to piszemy

  $$\int_{[a,b]} f\, dm = \int_a^b f(x)dx.$$

  Uzasadnimy później, że nie prowadzi to do nieporozumień.

7.2. **Podstawowe własności całki Lebesgue'a.**

Twierdzenie 7.6. *Jeżeli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną, $\mu(E) < \infty$ oraz $a \leqslant f(x) \leqslant b$ dla $x \in E$, to*

$$a\mu(E) \leqslant \int_E f\, d\mu \leqslant b\mu(E).$$

Dowód. Jeżeli $0 \leqslant a \leqslant f \leqslant b$ dla $x \in E$, to funkcja $f\chi_E$ jest nieujemna, a więc dla każdej funkcji prostej s takiej, że $a \leqslant s\chi_E \leqslant f\chi_E \leqslant b$ mamy

$$a\mu(E) \leqslant \int_E s\, d\mu \leqslant b\mu(E).$$

Zatem nierówność ta jest prawdziwa również dla f zamiast s.

Jeżeli f przyjmuje wartości obydwu znaków na E, oraz $a \leqslant f \leqslant b$, to $a \leqslant 0 \leqslant b$. Stosując powyższy wynik do nieujemnych funkcji f^+ i f^- dostajemy

$$\int f^+\, d\mu \leqslant b\mu(E), \quad -\int f^-\, d\mu \geqslant a\mu(E),$$

a stąd łatwo tezę twierdzenia. □

Twierdzenie 7.7. *(a) Jeżeli $f, g : X \to \mathbb{R}$ są mierzalne i całkowalne oraz $f \leqslant g$ na E, to*

$$\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$$

(b) Jeżeli $f \geqslant 0$ jest mierzalna oraz $A, B \in \mathcal{S}$, $A \subset B$, to

$$\int_A f\,d\mu \leqslant \int_B f\,d\mu.$$

(c) Jeżeli f jest całkowalna, to

$$\int (-f)\,d\mu = -\int f\,d\mu.$$

(d) Jeżeli f jest całkowalna oraz $c \in \mathbb{R}$, to

$$\int cf\,d\mu = c\int f\,d\mu.$$

(e) Jeżeli $\mu(E) = 0$, to $\int_E f\,d\mu = 0$.

Dowód. (a) Jeżeli $0 \leqslant f \leqslant g$, oraz s jest funkcją prostą taką, że $s \leqslant f$, to również $s \leqslant g$ i szukana nierówność wynika z definicji supremum.

Jeżeli f i g są dowolnego znaku i $f \leqslant g$, to $f^+ \leqslant g^+$ oraz $f^- \geqslant g^-$, a więc

$$\int f^+\,d\mu \leqslant \int g^+\,d\mu, \quad -\int f^-\,d\mu \leqslant -\int g^-\,d\mu.$$

Sumując stronami otrzymamy szukaną nierówność.

(b) Mamy $f\chi_A \leqslant f\chi_B$, i wystarczy zastosować własność (a).

(c) Mamy

$$(-f)^+ = \max(-f, 0) = f^-,$$
$$(-f)^- = \max(f, 0) = f^+,$$

a więc

$$\int (-f)\,d\mu = \int (-f)^+\,d\mu - \int (-f)^-\,d\mu$$
$$= \int f^-\,d\mu - \int f^+\,d\mu = -\int f\,d\mu.$$

(d) Jeżeli $f = \chi_E$ dla pewnego $E \in \mathcal{S}$, to

$$\int cf\,d\mu = \int c\chi_E\,d\mu = c\mu(E) = c\int \chi_E\,d\mu = c\int f\,d\mu.$$

Jeżeli $c > 0$ oraz $s = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i}$ jest funkcją prostą, to

$$\int cs\,d\mu = \int \sum_i (ca_i\chi_{E_i})\,d\mu$$
$$= c\sum_i a_i\mu(E_i) = c\int s\,d\mu.$$

Jeżeli $c > 0$ oraz f jest funkcją nieujemną, to

$$\begin{aligned}\int (cf)\, d\mu &= \sup\left\{\int s\, d\mu : 0 \leqslant s \leqslant cf\right\}\\ &= \sup\left\{\int (cs)\, d\mu : 0 \leqslant cs \leqslant cf\right\}\\ &= \sup\left\{c\int s\, d\mu : 0 \leqslant s \leqslant f\right\}\\ &= c\,\sup\left\{\int s\, d\mu : 0 \leqslant s \leqslant f\right\} = c\int f\, d\mu.\end{aligned}$$

Jeżeli $c > 0$ oraz f jest całkowalna, to wystarczy zauważyć, że

$$(cf)^+ = c\, f^+, \quad (cf)^- = c\, f^-,$$

oraz skorzystać z definicji całki funkcji dowolnego znaku.

W przypadku, gdy $c = 0$ własność (d) jest oczywista, a dla $c < 0$ wynika łatwo z punktu (c).

(e) Wynika to łatwo z punktu (a). □

Twierdzenie 7.8. *Jeżeli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną, to*

$$\left|\int f\, d\mu\right| \leqslant \int |f|\, d\mu.$$

Dowód. Mamy $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, a więc na mocy punktu (a) poprzedniego twierdzenia mamy

$$-\int |f|\, d\mu \leqslant \int f\, d\mu \leqslant \int |f|\, d\mu,$$

skąd wynika teza twierdzenia. □

Jedną z najważniejszych własności całki Lebesgue'a jest fakt, że określa ona nową miarą dodatnią na $\mathcal{S}$.

Twierdzenie 7.9. *Jeżeli $f : X \to [0, \infty]$ jest ustaloną funkcją $\mathcal{S}$–mierzalną, to funkcja zbioru $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ określona wzorem*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathcal{S},$$

jest miarą dodatnią na przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{S})$.

Dowód. Mamy $\mu(\varnothing) = 0$, a więc na mocy Twierdzenia 7.7 mamy $\nu(\varnothing) = 0$. Należy jeszcze wykazać, że jeżeli $A_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots$ są zbiorami parami rozłącznymi oraz $A = \bigcup_i A_i$, to

(2) $$\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i).$$

Załóżmy najpierw, że $f = \chi_E$ jest funkcją charakterystyczną to warunek powyższy jest równoważny przeliczalnej addytywności μ, gdyż

$$\int_A \chi_E \, d\mu = \mu(A \cap E).$$

Jeżeli f jest funkcja liniową, to f jest kombinacją liniową funkcji prostych, a więc (2) również zachodzi.

W przypadku ogólnym, jeżeli $f \geqslant 0$, to dla dowolnej mierzalnej funkcji prostej s takiej, że $0 \leqslant s \leqslant f$, mamy

$$\int_A s \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s \, d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n),$$

a więc na mocy definicji całki dla funkcji nieujemnej

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s \, d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Aby wykazać nierówność przeciwną, zauważmy, że możemy założyć, że $\nu(A_n) < \infty$, dla każdego n (w przeciwnym razie szukana nierówność jest oczywista).

Dla danego $\varepsilon > 0$ wybierzmy funkcję prostą s taką, że $0 \leqslant s \leqslant f$ oraz

$$\int_{A_1} s \, d\mu \geqslant \int_{A_1} f \, d\mu - \varepsilon, \quad \int_{A_2} s \, d\mu \geqslant \int_{A_2} f \, d\mu - \varepsilon.$$

Oczywiście

$$\nu(A_1 \cup A_n) \geqslant \int_{A_1 \cup A_2} s \, d\mu = \int_{A_1} s \, d\mu + \int_{A_2} s \, d\mu \geqslant \nu(A_1) + \nu(A_2) - 2\varepsilon,$$

a więc $\nu(A_1 \cup A_2) \geqslant \nu(A_1) + \nu(A_2)$. Przez indukcję

$$\nu(A) \geqslant \nu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \nu(A_i),$$

i przechodząc do granicy otrzymujemy szukaną nierówność. □

7.3. **Zbiory miary zero. Własność prawie wszędzie.** Jako prosty wniosek z poprzedniego twierdzenia oraz Twierdzenia 4.8 otrzymujemy wniosek mówiący, że przy całkowaniu można pominąć zbiory miary zero.

Wniosek 7.10. *Jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$, $B \subset A$ oraz $\mu(A \setminus B) = 0$, to*

$$\int_A f \, d\mu = \int_B f \, d\mu.$$

Definicja 7.11. Niech $E \in \mathcal{S}$. Powiemy, że własność P zachodzi dla *prawie wszystkich* x w zbiorze E (lub inaczej: *prawie wszędzie* na E), jeżeli własność ta zachodzi dla każdego $x \in E \setminus A$, gdzie A jest zbiorem miary zero.

Przykład 10.
- Jeżeli $f, g : X \to \mathbb{R}$ są mierzalne, to

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0,$$

to mówimy, że funkcje f i g są równe prawie wszędzie i piszemy $f = g$ p.w.

- Jeżeli $f = g$ p.w., to dla każdego $A \in \mathcal{S}$
$$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu,$$
o ile całki te istnieją. (ćw.)
- Jeżeli f jest całkowalna, to oczywiście $\mu(\{x : |f(x)| = \infty\}) = 0$, a więc inaczej: funkcja całkowalna jest skończona prawie wszędzie.
- Jeżeli zbiór $\{x : f(x) < 0\}$ ma miarę zero, to mówimy, że f jest nieujemna prawie wszędzie i piszemy $f \geqslant 0$ p.w.
- Jeżeli dopełnienie zbioru $\{x : \lim_n f_n(x) = f(x)\}$ ma miarę zero, to mówimy, że ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny do funkcji f prawie wszędzie.

Następne twierdzenie podaje warunki pozwalające sprawdzić kiedy $f = 0$ p.w. Zauważmy, że jeśli $f = 0$ p.w., to na mocy poprzedniego przykładu $\int f\,d\mu = 0$ oraz $\int_A f\,d\mu = 0$ dla każdego $A \in \mathcal{S}$.

Twierdzenie 7.12. *Załóżmy, że $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną.*
(a) Jeżeli f jest nieujemna oraz $\int f dm = 0$, to $f = 0$ p.w.
(b) Jeżeli dla każdego zbioru $A \in \mathcal{S}$ mamy $\int_A f\,d\mu = 0$, to $f = 0$ p.w.

Dowód. Niech $A_n = \{x : f(x) > 1/n\}$, $n \geqslant 1$.
(a) Jeżeli f jest nieujemna, ale nie jest równa 0 p.w., to istnieje n takie, że $\mu(A_n) > 0$. Ale wtedy
$$\int f\,d\mu \geqslant \int_{A_n} f\,d\mu \geqslant \frac{1}{n}\,\mu(A_n) > 0,$$
co daje sprzeczność.
(b) Niech $A = \{x : f(x) > \varepsilon\}$. Wtedy
$$0 = \int_A f\,d\mu \geqslant \int_A \varepsilon\,d\mu = \varepsilon\mu(A),$$
a więc $\mu(A) = 0$. Stosując ten fakt dla $\varepsilon = \frac{1}{n}$ oraz $n \geqslant 1$ dostajemy
$$\mu\left(\{x : f(x) > 0\}\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0.$$
Podobnie $\mu(\{x : f(x) < 0\}) = 0$, a więc $\mu(\{x : f(x) \neq 0\}) = 0$. □

7.4. **Twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności.** Całka Lebesgue'a ma znacznie lepsze własności niż całka Riemanna zwłaszcza jeżeli rozważymy własności graniczne. Przypomnijmy, że aby zapewnić całkowalność granicy ciągu funkcji całkowalnych w sensie Riemanna należy założyć jednostajną zbieżność tego ciągu. W przypadku całki Lebesgue'a wystarczy zbieżność punktowa i monotoniczność lub ograniczoność przez funkcję całkowalną.

Pierwsze twierdzenie nosi nazwę *twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej.*

Twierdzenie 7.13. *Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem nieujemnych funkcji mierzalnych takim, że*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \dots, \quad x \in X.$$

Jeżeli $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, to

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Dowód. Z własności całki oraz monotoniczności ciągu f_n wynika, że

$$\int f_1\, d\mu \leqslant \int f_2\, d\mu \leqslant \dots \leqslant \int f\, d\mu$$

a więc jest to niemalejący ciąg liczb. Jeżeli L oznacza jego granicę, to $L \leqslant \int f\, d\mu$. Aby wykazać twierdzenie musimy uzasadnić, że również $L \geqslant \int f\, d\mu$.

Niech $s = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{E_i}$ będzie dowolną funkcją prostą taką, że $s \geqslant f$ oraz ustalmy $c \in (0,1)$. Niech $A_n = \{x : f_n(x) \geqslant cs(x)\}$ dla $n \geqslant 1$. Ponieważ $f_n(x)$ rośnie do $f(x)$ dla każdego x oraz $c < 1$, to dla zbiorów A_n mamy

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n = X.$$

Zatem dla każdego n

$$\begin{aligned}\int f_n\, d\mu &\geqslant \int_{A_n} f_n\, d\mu \geqslant c \int_{A_n} s\, d\mu \\ &= c\int_{A_n} \left(\sum_{i=1}^m a_i \chi_{E_i}\right) d\mu = c \sum_{i=1}^m a_i \mu(E_i \cap A_n).\end{aligned}$$

Ale na mocy twierdzenie o ciągłości miar mamy

$$\lim_n \mu(E_i \cap A_n) = \mu(E_i),$$

a więc przechodząc do granicy w ostatniej nierówności otrzymamy

$$L \geqslant \sum_{i=1}^m a_i \mu(E_i) = c \int s\, d\mu.$$

Z dowolności $c \in (0,1)$ mamy $L \geqslant \int s\, d\mu$, a z dowolności $s \leqslant f$ mamy $L \geqslant \int f\, d\mu$. □

Przykład 11. Jeżeli $X = [0,\infty)$ z miarą Lebesgue'a m oraz $f_n = n\chi_{(0,1n)}$. Wtedy $f_n \geqslant 0$, $f_n \to f = 0$ dla każdego x, ale $\int f_n\, dm = 1$ oraz $\int f\, dm = 0$. (ciąg $\{f_n\}$ nie jest rosnący dla każdego $x \in X$).

Uwaga. W powyższym twierdzeniu można założyć, że każda funkcja f_n jest nieujemna p.w., że ciąg $\{f_n\}$ jest niemalejący p.w. oraz, że zbieżność zachodzi p.w. (ćw.)

Korzystając z twierdzenia o zbieżności monotonicznej możemy dowieść, że całka sumy jest równa sumie całek.

Twierdzenie 7.14. *Jeżeli f i g są nieujemnymi funkcjami mierzalnymi, albo jeżeli f i g sa całkowalne, to*

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że f i g są nieujemnymi funkcjami prostymi, tzn.

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j},$$

gdzie $A_1, \dots, A_m$ oraz $B_1, \dots, B_n$ są parami rozłączne oraz $\bigcup_i A_i = \bigcup_j B_j = X$. Wtedy

$$f + g = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j},$$

a więc

$$\begin{aligned}\int (f+g)\, d\mu &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(B_j) = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.\end{aligned}$$

Zatem twierdzenie zachodzi dla funkcji prostych.

Jeżeli f i g sa dowolnymi funkcjami nieujemnymi, to istnieją niemalejące ciągi nieujemnych funkcji prostych $\{s_n\}$ i $\{t_n\}$ takie, że

$$f = \lim_n s_n, \quad g = \lim_n t_n.$$

Wtedy $s_n + t_n$, $n \geqslant 1$, są funkcjami prostymi, które w granicy dają $f + g$. Zatem na mocy twierdzenia o zbieżności monotonicznej mamy

$$\int (f+g)\, d\mu = \lim_n \int (s_n + t_n)\, d\mu = \lim_n \int s_n\, d\mu + \lim_n \int t_n\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

Jeżeli natomiast f i g są całkowalne, to

$$\int |f+g|\, d\mu \leqslant \int (|f| + |g|)\, d\mu = \int |f|\, d\mu + \int |g|\, d\mu < \infty,$$

a więc $f + g$ jest całkowalna. Ponadto

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

a więc

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f+g)^-.$$

Wszystkie funkcje w powyższej sumie są nieujemne, więc stosując powyższy wynik mamy

$$\int (f+g)^+\,d\mu + \int f^-\,d\mu + \int g^-\,d\mu = \int f^+\,d\mu + \int g^+\,d\mu + \int (f+g)^-\,d\mu.$$

Po prostych przekształceniach

$$\begin{aligned}\int (f+g)\,d\mu &= \int (f+g)^+\,d\mu - \int (f+g)^-\,d\mu \\ &= \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu + \int g^+\,d\mu - \int g^-\,d\mu \\ &= \int f\,d\mu + \int g\,d\mu. \end{aligned}$$

□

Twierdzenie powyższe można uogólnić dla sumy szeregu funkcji nieujemnych.

Twierdzenie 7.15. *Jeżeli $\{f_n\}$ jest ciągiem nieujemych funkcji mierzalnych, to*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Dowód. Niech $F_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$. Na mocy poprzedniego twierdzenia

$$\int F_N\,d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int f_n\,d\mu.$$

Ponadto ciąg $\{F_N,\ N \geqslant 1\}$ jest niemalejący i jego granica wynosi $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Zatem na mocy twierdzenia o zbieżności monotonicznej

$$\begin{aligned}\int f\,d\mu &= \int \Big(\lim_{N\to\infty} F_N\Big)\,d\mu = \lim_{N\to\infty} \int F_N\,d\mu \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int f_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\,d\mu.\end{aligned}$$

□

Następne twierdzenie nosi nazwę *lematu Fatou.*

Przypomnienie:

$$\liminf_n a_n = \sup_n\Big(\inf_{k\geqslant n} a_k\Big) = \lim_n\Big(\inf_{k\geqslant n} a_k\Big).$$

Twierdzenie 7.16. *Załóżmy, że $\{f_n\}$ jest ciągiem nieujemych funkcji mierzalnych. Wtedy*

$$\int \Big(\liminf_n f_n\Big)\,d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n\,d\mu.$$

Dowód. Niech

$$g_n = \inf_{k\geqslant n} f_k.$$

Wtedy $\{g_n\}$ jest niemalejącym ciągiem nieujemych funkcji mierzalnych, którego granicą jest $\liminf_n f_n$. Oczywiście, $g_n \leqslant f_k$ for $k \geqslant n$, a więc również

$$\int g_n\,d\mu \leqslant \int f_k\,d\mu.$$

Stąd dla każdego $n \geqslant 1$

$$\int g_n \, d\mu \leqslant \inf_{k \geqslant n} \int f_k \, d\mu.$$

Przechodząc z $n \to \infty$, na mocy twierdzenia o zbieżności monotonicznej po lewej stronie otrzymamy $\int (\liminf_n f_n) \, d\mu$, a po prawej $\liminf_n \int f_n \, d\mu$. □

Kolejnym bardzo ważnym wynikiem jest *twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej.*

Twierdzenie 7.17. *Jeżeli $\{f_n\}$ jest dowolnym ciągiem funkcji mierzalnych, zbieżnym punktowo do funkcji f oraz istnieje funkcja mierzalna g taka, że*

$$|f_n| \leqslant g \quad \textit{oraz} \quad \int g \, d\mu < \infty,$$

to

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu.$$

W szczególności jeżeli $\mu(X) < \infty$ oraz $|f_n| \leqslant M$ dla $n \geqslant 1$, to teza twierdzenia jest prawdziwa.

Dowód. Zauważmy, że $\{f_n + g\}$ jest ciągiem funkcji nieujemych, a więc na mocy lematu Fatou

$$\int f \, d\mu + \int g \, d\mu = \int (f + g) \, d\mu \leqslant \liminf_n \int (f_n + g) \, d\mu = \liminf_n \int f_n \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Skoro g jest całkowalna, o odejmując stronami $\int g \, d\mu$ otrzymujemy

$$\int f \, d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n \, d\mu.$$

Podobnie rozważając funkcje nieujemne $g - f_n$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int g \, d\mu - \int f \, d\mu = \int (g - f) \, d\mu &\leqslant \liminf_n \int (g - f_n) \, d\mu \\ &= \int g \, d\mu + \liminf_n \int (-f_n) \, d\mu, \end{aligned}$$

a więc

$$- \int f \, d\mu \leqslant \liminf_n \int (-f_n) \, d\mu = - \limsup_n \int f_n \, d\mu.$$

Zatem w połączeniu z pierwszą częścią dowodu

$$\int f \, d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n \, d\mu \leqslant \limsup_n \int f_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Przykład 12. Ciąg $f_n = n\chi_{[0,1/n]}$ z Przykładu 11 pokazuje również, że bez założenia ograniczoności przez funkcję całkowalną, zbieżność całek może nie zachodzić.

7.5. **Porównanie z całką Riemanna.** Przypomnijmy krótko definicję całki Riemanna funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograniczonej.

Uwaga. W tym paragrafie będziemy pisać $\int_{[a,b]} f\,dm$ dla całki Lebesgue'a względem miary Lebesgue'a m oraz $\int_a^b f(x)\,dx$ dla całki Riemanna.

Niech $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$, gdzie

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$$

Określmy dla $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f, \quad m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f,$$

oraz *górną* i *dolną sumę całkową* dla f:

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Dalej określamy całkę górną i całkę dolną Riemanna

$$\overline{\int_a^b f(x)\,dx} = \inf\{U(P, f) : P \text{ jest podziałem } [a, b]\},$$

$$\underline{\int_a^b f(x)\,dx} = \sup\{L(P, f) : P \text{ jest podziałem } [a, b]\}$$

Jeżeli całki górna i dolna są równe, to mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$, a ich wspólną wartość oznaczamy przez $\int_a^b f(x)\,dx$.

Twierdzenie 7.18. *(a) Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna, to f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na $[a, b]$ oraz*

$$\int_{[a,b]} f\,dm = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(b) Ponadto funkcja f ograniczona jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a oraz zbiór punktów nieciągłości f w $[a, b]$ ma miarę Lebesgue'a zero (inaczej f jest ciągła prawie wszędzie na $[a, b]$).

Szkic dowodu. Wszystkie całki w dowodzie są liczone po przedziale

Wybieramy niemalejący ciąg podziałów P_k taki, że

$$U(P_k, f) \searrow \underline{\int f(x)\,dx}, \quad L(P_k, f) \nearrow \overline{\int f(x)\,dx}$$

oraz przy ustalonym $P_k = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ określamy funkcje

$$U_k(x) = \sum_i M_i \chi_{[x_{i-1},x_i]}, \quad L_k(x) = \sum_i m_i \chi_{[x_{i-1},x_i]}.$$

Oczywiście wartości M_i oraz m_i zależą od podziału P_k. Wtedy

$$\int U_k\,dm = U(P_k, f), \quad \int L_k\,dm = L(P_k, f)$$

oraz

$$L_1(x) \leqslant L_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f(x) \leqslant \ldots \leqslant U_2(x) \leqslant U_1(x).$$

Zatem istnieją granice

$$L(x) = \lim_k L_k(x), \quad U(x) = \lim_k U_k(x),$$

i korzystając z twierdzenia o zbieżności ograniczonej (f jest ograniczona!!!) mamy

$$\int (U - L)\, dm = \lim_k \int (U_k - L_k)\, dm = \lim_k [U(P_k, f) - L(P_k, f)] = \overline{\int} f(x)\, dx - \underline{\int} f(x)\, dx.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że na mocy ostatniej równości f jest całkowalna w sensie Riemanna, wtedy i tylko wtedy, gdy $U = L$ p.w., co z kolei oznacza, że f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a (i zachodzi równość całek) oraz zbiór punktów nieciągłości f ma miarę zero. □

Przykład 13. Jeżeli $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją charakterystyczną zbioru liczb wymiernych z przedziału $[0, 1]$, to f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a, bo $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ jest zbiorem przeliczalnym, a więc borelowskim, a więc mierzalnym w sensie Lebesgue'a. Ponadto ponieważ $m(\mathbb{Q}) = 0$, to $\int_{[0,1]} f\, dm = 0$.

Z drugiej strony f nie jest ciągła w żadnym punkcie przedziału $[0, 1]$, a więc nie jest to funkcja całkowalna w sensie Riemanna. Zatem klasa kunkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a jest szersza niż klasa funkcji całkowalnych w sensie Riemanna.

8. Konstrukcja miary Lebesgue'a

Miara m_n i σ–ciało $\mathscr{L}_n$ zostaną określone tak, że:

- $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{L}_n$, a więc każdy zbiór borelowski w $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem mierzalnym;
- w szczególności każdy przedział w $\mathbb{R}^n$ postaci
$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$
jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a;
- $m_n(P) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$, a więc m_1 jest odpowiednikiem długości na prostej; m_2 jest odpowiednikiem pola na płaszczyźnie, a m_3 jest odpowiednikiem objętości w przestrzeni.

Uwaga. Niestety nie da się określić miary Lebesgue'a na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$; w dalszym ciągu podamy przykład zbioru niemierzalnego (tzw. zbiór Vitali'ego).

Podamy konstrukcję jednowymiarowej miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}$; będziemy przy tym pisać m zamiast m_1 oraz $\mathscr{L}$ zamiast $\mathscr{L}_1$. Główny pomysł konstrukcji miary Lebesgue'a, to zauważenie, że miara m otwartego przedziału (a, b) powinna być równa jego długości, a więc $m((a, b)) = b - a$. Zatem, jeśli G jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$, oraz
$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i),$$
gdzie przedziały te sa parami rozłączne, to
$$m(G) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i).$$
Ale zbiory otwarte nie stanowią σ–ciała, a więc musimy rozszerzyć tę definicję. Niech dla $E \subset \mathbb{R}$
$$m(E) = \inf \{ m(G) : G \text{ otwarty oraz } E \subset G \}.$$
Niestety m nie jest miarą na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, a więc musimy się ograniczyć do pewnego σ–ciała; będzie to $\mathscr{L}$. Jednak technicznie będzie łatwiej rozważać przedziały postaci $(a, b]$ zamiast przedziałów otwartych. Chodzi o to, że skończone sumy przedziałów postaci $(a, b]$ tworzą ciało, które generuje $\mathscr{B}$, a skończone sumy przedziałów otwartych nie tworzą ciała.

8.1. **Miara zewnętrzna.**

Definicja 8.1. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Funkcję $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ nazywamy *miarą zewnętrzną*, jeśli spełnia ona warunki:

(1) $\mu^*(\varnothing) = 0$;

(2) jeżeli $A \subset B$, to $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$;

(3) jeżeli $A_1, A_2, \ldots \subset X$, to
$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Uwaga. Miara zewnętrzna **nie** jest miarą dodatnią.

Najczęściej spotykany sposób zadawania miary zewnętrznej podaje następne twierdzenie:

Twierdzenie 8.2. *Niech $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ będzie dowolną rodzina podzbiorów zbioru X taką, że $\varnothing, X \in \mathcal{C}$. Niech $\ell : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ będzie dowolną funkcją taką, że $\ell(\varnothing) = 0$. Określmy*

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \ell(A_i) : A_i \in \mathcal{C} \text{ dla każdego } i \text{ oraz } E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

Funkcja μ^* jest miarą zewnętrzną.

Zanim udowodnimy to twierdzenie zobaczmy dwa przykłady.

Przykład 14.
- Jeżeli $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ oznacza rodzinę przedziałów półotwartych $(a, b]$ oraz $\ell((a, b]) = b - a$, to μ^* określona w powyższym twierdzeniu jest miarą zewnętrzną.
- Jeżeli $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}$ oznacza rodzinę prostokątów półotwartych $(a, b] \times (c, d]$ oraz

$$\ell((a, b] \times (c, d]) = (b - a)(d - c),$$

  to μ^* określona w powyższym twierdzeniu jest miarą zewnętrzną.

Dowód Twierdzenia 8.2. Musimy sprawdzić warunki (1), (2) i (3) z definicji 8.1.

(1) Kładąc $A_1 = A_2 = \ldots = \varnothing$ mamy $\sum_i \ell(A_i) = 0$, i z nieujemności ℓ otrzymujemy $\mu^*(\varnothing) = 0$.

(2) Dalej, jeżeli $A \subset B$ oraz $B \subset \bigcup_i A_i$, to również $A \subset \bigcup A_i$, a więc $\mu^*(A) \leqslant \sum_i \ell(A_i)$. Zatem $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.

(3) Na koniec, przypuśćmy, że $A_1, A_2, \ldots$ są dowolnymi podzbiorami X i wybierzmy dowolne $\varepsilon > 0$. Dla każdego $i \geqslant 1$ istnieje ciąg $C_{i1}, C_{i2}, \ldots \in \mathcal{C}$ taki, że

$$A_i \subset \bigcup_j C_{ij} \quad \text{oraz} \quad \sum_j \ell(C_{ij}) \leqslant \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Wtedy $\sum_i A_i \subset \bigcup_{i,j} C_{ij}$ oraz

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &\leqslant \sum_{i,j} \ell(C_{ij}) = \sum_i \left(\sum_j \ell(C_{ij})\right) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Z dowolności wyboru ε wynika własność (3). □

8.2. **Twierdzenie Caratheodory'ego.** Następny krok w konstrukcji miary Lebesgue'a to określenie σ–ciała zbiorów mierzalnych względem miary zewnętrznej.

Definicja 8.3. Niech $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ będzie miarą zewnętrzną. Powiemy, że zbiór $A \subset X$ jest *μ^*–mierzalny*, jeżeli dla każdego $E \subset X$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Warunek z definicji nazywamy *warunkiem Caratheodory'ego*.

Zauważmy, że skoro μ^* jest miarą zewnętrzną, to na mocy warunku (3) definicji 8.1 dla każdego zbioru E i dla każdego $A \subset X$ mamy

$$\mu^*(E) \leqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Zatem, aby sprawdzić, czy zbiór A jest μ^*–mierzalny wystarczy sprawdzić, że

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c). \tag{3}$$

dla każdego $E \subset X$. Oczywiście warunek ten jest zawsze spełniony jeśli $\mu^*(E) = \infty$.

Definicja 8.4. Mówimy, że $A \subset X$ jest zbiorem μ^*–miary zero, jeżeli $\mu^*(A) = 0$

Twierdzenie 8.5. *Klasa $\mathcal{E}$ zbiorów μ^*–mierzalnych jest σ–ciałem w X. Jeżeli określimy $\mu : \mathcal{E} \to [0,\infty]$ wzorem*

$$\mu(E) = \mu^*(E), \quad E \in \mathcal{E},$$

to μ jest miarą dodatnią. Ponadto σ–ciało $\mathcal{E}$ zawiera wszystkie zbiory μ^*–miary zero.

Dowód. Dowód podzielony jest na 4 kroki.

Krok 1: Pokażemy, najpierw, że $\mathcal{E}$ jest ciałem.

- Zauważmy, że $E \cap \varnothing = \varnothing$, $E \cap \varnothing^c = E \cap X = E$. Zatem warunek Caratheodory'ego dla $\varnothing$ jest oczywiście spełniony, czyli $\varnothing \in \mathcal{E}$.
- Jeżeli $A \in \mathcal{E}$, to biorąc pod uwagę symetryczność warunku Caratheodory'ego ze względu na A i A^c, wnioskujemy, że $A^c \in \mathcal{E}$.
- Niech $A, B \in \mathcal{E}$ oraz $E \subset X$. Mamy zatem
$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)\\ &= \big[\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c)\big] +\\ &\quad + \big[\mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c)\big]\\ &\geqslant \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c)\end{aligned}$$
  Pierwsza równość wynika z mierzalności A, druga z mierzalności B (zastosowanej dwukrotnie), a ostatnia nierówność z podaddytywności μ^* oraz faktu, że
  $$A \cup B \subset (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$
  Zatem $A \cup B$ spełnia warunek (3), czyli $A \cup B \in \mathcal{E}$.

Krok 2: Pokażemy teraz, że $\mathcal{E}$ jest σ–ciałem.

Niech najpierw $A_1, A_2, \ldots$ będą parami rozłącznymi zbiorami z $\mathcal{E}$. Określmy

$$B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Mamy $B_n \cap A_n = A_n$ oraz $B_n \cap A_n^c = B_{n-1}$, a więc dla dowolnego $E \subset X$

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) \\ &= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}). \end{aligned}$$

Powtarzając otrzymamy

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i).$$

Na mocy poprzedniego kroku $B_n \in \mathcal{E}$. Zatem dla dowolnego $E \subset X$

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B_n^c) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \end{aligned}$$

z monotoniczności μ^*. Biorąc $n \to \infty$ i korzystając z podaddytywności μ^*

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \\ &\geqslant \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap A_i) \right) + \mu^*(E \cap B^c) \\ &= \mu^* \left(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + \mu^*(E \cap B^c) \\ &= \mu^* (E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \end{aligned}$$

a więc $B \in \mathcal{E}$.

Jeżeli teraz mamy dowolny ciąg $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E}$, to kładąc

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \quad B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}), \quad n \geqslant 3.$$

otrzymujemy ciąg $B_1, B_2, \ldots$ zbiorów z $\mathcal{E}$ parami rozłącznych i taki, że

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Zatem $\bigcup_i A_i \in \mathcal{E}$.

Krok 3: Pokażemy, że μ^* jest miarą na $\mathcal{E}$.

Zauważmy, że na mocy Kroku 1 wiemy, że $\varnothing \in \mathcal{E}$, a z definicji $\mu^*(\varnothing) = 0$.

Ponadto, w poprzednim kroku wykazaliśmy, że jeśli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E}$ są parami rozłączne oraz B oznacza ich sumę, to dla dowolnego $E \subset X$

$$\mu^*(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c)$$

Kładąc $E = B$ dostajemy

$$\mu^*(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Krok 4: Pokażemy, że $\mathcal{E}$ zawiera zbiory μ^*–miary zero.

Jeżeli $A \subset X$ oraz $\mu^*(A) = 0$, oraz $E \subset X$, to $\mu^*(E \cap A) \leqslant \mu^*(A) = 0$ oraz $\mu^*(E \cap A^c) \leqslant \mu^*(E)$, a więc

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leqslant \mu^*(E),$$

a więc $A \in \mathcal{E}$. □

8.3. **Miara Lebesgue'a na prostej.** Rozważymy teraz szczegółowo przypadek gdy $X = \mathbb{R}$ oraz $\mathcal{C}$ jest ciałem $\mathcal{A}_0$ skończonych sum przedziałów postaci $(a, b]$ oraz dla $A \in \mathcal{A}_0$ postaci $A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$ określamy

$$\ell(A) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Określmy

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \ell(A_i) : A_i \in \mathcal{A}_0 \text{ dla każdego } i \text{ oraz } E \subset \bigcup_i A_i \right\}. \tag{4}$$

Na mocy Twierdzenia 8.2 m^* jest miarą zewnętrzną w sensie Definicji 8.1. Funkcję m^* nazywamy (jednowymiarową) *miarą zewnętrzną Lebesgue'a.*

Na mocy Twierdzenia 8.5 klasa $\mathscr{L}$ zbiorów m^*–mierzalnych jest σ–ciałem. Elementy σ–ciała $\mathscr{L}$ nazywamy *zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a.* Ponadto na mocy tego samego twierdzenia funkcja zbioru

$$m(A) = m^*(A), \quad A \in \mathscr{L},$$

jest miarą dodatnią na $\mathscr{L}$. Nazywamy ją (jednowymiarową) *miarą Lebesgue'a.*

Aby zobaczyć co mierzy miara Lebesgue'a musimy jeszcze wykazać dwie ważne własności miary Lebesgue'a:

(1) $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{L}$;
(2) $m((a, b]) = m^*((a, b]) = \ell((a, b]) = b - a$.

Zatem jednowymiarowa miara Lebesgue'a jest uogólnieniem (a właściwie ścisłą definicją) pojęcia długości podzbiorów prostej.

Udowodnimy te własności w dwóch krokach. Pierwszym krokiem jest wykazanie, że ℓ jest funkcją przeliczalnie addytywną na ciele $\mathcal{A}_0$. Nie jest to jednak miara, bo nie jest określona na σ–ciele.

Twierdzenie 8.6. *Jeżeli* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_0$ *oraz* $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}_0$*, to*

$$\ell\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell\left(A_i\right).$$

Dowód. Niech $A = \bigcup_i A_i$. Skoro $A \in \mathcal{A}_0$, to możemy założyć, że $A = (a, b]$. Mamy dla dowolnego $n \geqslant 1$

$$\ell(A) \geqslant \ell\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\ell}\left(A_i\right),$$

bo ℓ jest skończenie addytywna na $\mathcal{A}_0$. Zatem również $\ell(A) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \ell\left(A_i\right)$.

Aby udowodnić nierówność przeciwną przyjmijmy, że $(a, b]$ jest przedziałem skończonym (przypadek nieskończony – ćw.). Możemy również założyć, że $A_i = (a_i, b_i]$ dla $i \geqslant 1$. Wybierzmy $\varepsilon > 0$. Rodzina

$$\left\{\left(a_i, b_i + \frac{\varepsilon}{2^i}\right),\, i \geqslant 1\right\}$$

jest pokryciem otwartym przedziału domkniętego $[a + \varepsilon, b]$, a więc na mocy jego zwartości można wybrać podpokrycie skończone, złożone z N przedziałów. Przenumerowując i usuwając zbędne przedziały możemy założyć, że

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_N$$

oraz

$$b_i + \frac{\varepsilon}{2^i} \in \left(a_{i+1}, b_{i+1} + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right).$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\ell(A) &= b - a = b - (a + \varepsilon) + \varepsilon \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{N}\left(b_i + \frac{\varepsilon}{2^i} - a_i\right) + \varepsilon \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \ell(A_i) + 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

a więc $\ell(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \ell(A_i)$. □

Drugim krokiem jest rozszerzenie ℓ na σ–ciało zbiorów borelowskich i pokazanie, że rozszerzenie to pokrywa się z miarą Lebesgue'a na $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Niech $\mathcal{A}_0$ będzie ciałem pozdbiorów zbioru X, a ℓ funkcją przeliczalnie addytywną na $\mathcal{A}_0$, tzn. jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_0$ oraz $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}_0$, to

$$\ell\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell\left(A_i\right).$$

Określmy m^* wzorem

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \ell(A_i) : A_i \in \mathcal{A}_0 \text{ dla każdego } i \text{ oraz } E \subset \bigcup_i A_i\right\}.$$

Jest to taki sam wzór jak (4), ale tym razem m^*, $\mathcal{A}_0$ oraz ℓ są ogólniejsze. Oczywiście na mocy Twierdzenia 8.2 m^* jest również miarą zewnętrzną, więc przez $\mathcal{E}$ określamy σ–ciało zbiorów m^*–mierzalnych.

Twierdzenie 8.7 (Caratheodory'ego o rozszerzaniu miary)**.** *Przy powyższych oznaczeniach*

(a) $m^*(A) = \ell(A)$ *dla* $A \in \mathcal{A}_0$*;*

(b) $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{E}$*, a więc* $\sigma(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{E}$*;*

(c) jeżeli ℓ *jest* σ*–skończona, to funkcja* ℓ *ma jednoznaczne rozszerzenie na* $\sigma(\mathcal{A}_0)$*.*

Uwaga. Z części (a) i (b) tego twierdzenia wynika, że każdy przedział postaci $(a, b]$ jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, a jego miara Lebesgue'a jest równa jego długości. Z części (c) wynika, że rozszerzenie funkcji ℓ na zbiory borelowskie pokrywa się z miarą Lebesgue'a.

Dowód.

(a) Niech $E \in \mathcal{A}_0$. Mamy $m^*(E) \leqslant \ell(E)$ (wystarczy przyjąć $A_1 = E$, $A_2 = A_3 = \ldots = \varnothing$).
Jeśli $E \subset \bigcup_i A_i$, gdzie $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_0$, to określamy

$$B_n = E \cap \left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right), \quad n \geqslant 1.$$

Wtedy $B_1, B_2, \ldots$ są rozłączne, $\bigcup_n B_n = E$, oraz $B_n \in \mathcal{A}_0$ i $\ell(B_n) \leqslant \ell(A_n)$. Zatem z przeliczalnej addytywności ℓ na $\mathcal{A}_0$ mamy

$$\ell(E) = \sum_n \ell(B_n) \leqslant \sum_n \ell(A_n),$$

a więc $\ell(E) \leqslant m^*(E)$. Zatem $\ell(E) = m^*(E)$ dla $E \in \mathcal{A}_0$.

(b) Niech $A \in \mathcal{A}_0$, $E \subset X$. Wybieramy dowolne $\varepsilon > 0$ oraz zbiory $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}_0$ takie, że

$$E \subset \bigcup_i B_i, \quad \sum_i \ell(B_i) \leqslant m^*(E) + \varepsilon.$$

Wtedy z addytywności ℓ na $\mathcal{A}_0$

$$\begin{aligned} m^*(E)+\varepsilon &\geqslant \sum_i \ell(B_i) \\ &= \sum_i \ell(B_i\cap A)+\sum_i \ell(B_i\cap A^c) \\ &\geqslant m^*(E\cap A)+m^*(E\cap A^c), \end{aligned}$$

gdyż $B_i\cap A$, $i=1,2,\dots$, jest pokryciem zbioru $E\cap A$, a $B_i\cap A^c$, $i=1,2,\dots$, jest pokryciem zbioru $E\cap A^c$. Z dowolności wyboru $\varepsilon>0$ mamy, że A spełnia warunek (3) dla każdego $E\subset X$, a więc A jest m^*–mierzalny.

(c) Załóżmy, że n jest rozszerzeniem ℓ na $\sigma(\mathcal{A}_0)$, tzn. n jest miarą na $\sigma(\mathcal{A}_0)$ taką, że

$$n(E)=\ell(E),\quad E\in\mathcal{A}_0.$$

Pokażemy, że równość ta zachodzi również dla $E\in\sigma(\mathcal{A}_0)$.

Mamy

$$\begin{aligned} m^*(E) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \ell(A_i) : A_i\in\mathcal{A}_0 \text{ dla każdego } i \text{ oraz } E\subset\bigcup_i A_i\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty n(A_i) : A_i\in\mathcal{A}_0 \text{ dla każdego } i \text{ oraz } E\subset\bigcup_i A_i\right\}. \end{aligned}$$

Zatem, jeżeli $E\subset\bigcup_i A_i$, to

$$n(E)\leqslant n\left(\bigcup_i A_i\right)\leqslant\sum_i n(A_i),$$

gdyż n jest miarą, a stąd wynika, że $n(E)\leqslant m^*(E)$.

Z drugiej strony wybierzmy $\varepsilon>0$ oraz zbiory $A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{A}_0$ takie, że

$$\sum_i \ell(A_i)\leqslant m^*(E)+\varepsilon,\qquad E\subset\bigcup_i A_i.$$

Niech $A=\bigcup_i A_i\in\sigma(\mathcal{A}_0)$ oraz $B_k=A_1\cup\ldots\cup A_k\in\mathcal{A}_0$. Wtedy $m^*(A)\leqslant m^*(E)+\varepsilon$, a więc

$$m^*(A\setminus E)\leqslant\varepsilon,$$

gdyż m^* jest miarą na $\sigma(\mathcal{A}_0)$ oraz $A,E\in\sigma(\mathcal{A}_0)$. Zatem

$$m^*(A)=\lim_k m^*(B_k)=\lim_k n(B_k)=n(A).$$

Stąd

$$\begin{aligned} m^*(E)\leqslant m^*(A) &= n(A)=n(E)+n(A\setminus E) \\ &\leqslant n(E)+m^*(A\setminus E)\leqslant n(E)+\varepsilon. \end{aligned}$$

Z dowolności $\varepsilon>0$ mamy $m^*(E)\leqslant n(E)$. □

Uwaga. (1) $\mathscr{B}(\mathbb{R})\subset\mathscr{L}\subset\mathcal{P}(\mathbb{R})$, ale $\mathscr{B}(\mathbb{R})\neq\mathscr{L}\neq\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(2) Jak już wiemy z Twierdzenia 8.5 miara Lebesgue'a na $\mathscr{L}$ jest zupełna. Można wykazać, że $\mathscr{L}$ jest uzupełnieniem $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ w sensie Uwagi po Definicji 4.10.

9. Twierdzenie Fubiniego

Twierdzenie Fubiniego to abstrakcyjny odpowiednik znanego dla funkcji dwóch zmiennych twierdzenia, która umożliwia obliczenie całki podwójnej przez zamianę na całki iterowane. Najpierw jednak należy zdefiniować σ–ciało oraz miarę w iloczynie kartezjańskim dwóch przestrzeni z miarą.

9.1. **Twierdzenie o klasach monotonicznych.**

Definicja 9.1. Rodzinę zbiorów $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy klasą monotoniczną jeśli spełnia ona warunki:

(a) jeżeli $A_i \in \mathcal{M}$ oraz $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, to $\bigcup_i A_i \in \mathcal{M}$;
(b) jeżeli $A_i \in \mathcal{M}$ oraz $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, to $\bigcap_i A_i \in \mathcal{M}$.

Oczywiście, każde σ–ciało jest klasą monotoniczną, ale niekoniecznie na odwrót.

Twierdzenie 9.2. *Załóżmy, że $\mathcal{S}_0$ jest ciałem oraz $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{S}_0)$. Wtedy najmniejszą klasą monotoniczną zawierającą ciało $\mathcal{S}_0$ jest σ–ciało $\mathcal{S}$.*

9.2. **Miary produktowe.** Niech $(X, \mathcal{S})$ oraz $(Y, \mathcal{T})$ będą dwoma przestrzeniami mierzalnymi. *Mierzalnym prostokątem* nazywamy każdy podzbiór iloczynu kartejzańskiego $X \times Y$ postaci $A \times B$, gdzie $A \in \mathcal{S}$ oraz $B \in \mathcal{T}$. Niech $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ oznacza klasę wszystkich mierzalnych prostokątów oraz niech

$$\mathcal{S} \times \mathcal{T} = \sigma(\mathcal{C}),$$

oznacza *σ–ciało produktowe* w $X \times Y$.

Definicja 9.3. Dla dowolnego zbioru $E \subset X \times Y$ oraz $x \in X$, $y \in Y$, określamy zbiory

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\} \subset Y,$$

oraz

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\} \subset X.$$

Nazywamy je *przekrojami* zbioru E.

Twierdzenie 9.4. *Przekroje zbioru mierzalnego są zbiorami mierzalnymi. Dokładniej, jeżeli $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, to:*

- *dla każdego $x \in X$ mamy $E_x \in \mathcal{T}$;*
- *dla każdego $y \in Y$ mamy $E^y \in \mathcal{S}$.*

Szkic dowodu. Wystarczy rozważyć klasę $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ zbiorów E, których każdy przekrój jest mierzalny. Klasa $\mathcal{R}$ jest σ–ciałem oraz zawiera wszystkie mierzalne prostokąty. Zatem $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}$ a więc $\mathcal{S} \times \mathcal{T} \subset \mathcal{R}$. $\square$

Mając określone σ–ciało w $X \times Y$ możemy rozważać funkcje $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ mierzalne.

Niech $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Dla dowolnego $x \in X$ określamy funkcję $f_x : Y \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f_x(y) = f(x, y), \quad y \in Y,$$

oraz dla ustalonego $y \in Y$ określamy funkcję $f^y : X \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f^y(x) = f(x, y), \quad x \in X.$$

Funkcje f_x i f^y nazywamy przekrojami funkcji f.

Twierdzenie 9.5. *Przekroje funkcji mierzalnej są funkcjami mierzalnymi. Dokładniej, jeżeli $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ jest funkcją $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$–mierzalną, to:*

- *dla każdego $x \in X$ funkcja f_x jest $\mathcal{T}$–mierzalna;*
- *dla każdego $y \in Y$ funkcja f_y jest $\mathcal{S}$–mierzalna.*

Dowód. Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ jeżeli $Q = \{(x, y) : f(x, y) > a\}$, to $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ oraz

$$\{y : f_x(y) > a\} = Q_x, \quad \{x : f^y(x) > a\} = Q^y.$$

Na mocy poprzedniego twierdzenia $Q_x \in \mathcal{T}$ i $Q^y \in \mathcal{S}$. $\square$

Niech teraz $(X, \mathcal{S}, \mu)$ oraz $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ będą dwiema przestrzeniami z miarami. Na przestrzeni mierzalnej $(X \times Y, \mathcal{S} \times \mathcal{T})$ określimy teraz miarę dodatnią $\lambda = \mu \times \nu$.

Twierdzenie 9.6. *Załóżmy, że miary μ oraz ν są σ–skończone i niech $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Określmy funkcje $\varphi : X \to [0, \infty]$ i $\psi : Y \to [0, \infty]$ wzorami*

$$\varphi(x) = \nu(E_x), \quad x \in X,$$

oraz

$$\psi(y) = \mu(E^y), \quad y \in Y.$$

Wtedy φ jest $\mathcal{S}$–mierzalna, a ψ jest $\mathcal{T}$–mierzalna oraz

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\nu.$$

Idea dowodu. W dowodzie korzysta się z pojęcia monotonicznej klasy zbiorów. Jeśli $\mathcal{R}$ oznacza rodzinę zbiorów $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, dla których twierdzenie jest prawdziwe, to $\mathbb{R}$ zawiera wszystkie mierzalne prostokąty. Istotnie, jeżeli $E = A \times B$, gdzie $A \in \mathcal{S}$ oraz $B \in \mathcal{T}$, to $E_x = B$ oraz $E^y = A$, a więc wtedy funkcje $\varphi = \nu(B)\chi_A$ i $\psi = \mu(A)\chi_B$ są mierzalne. Ponadto

$$\int_X \varphi \, d\mu = \nu(B) \int \chi_A \, d\mu = \mu(A)\nu(B) = \mu(A) \int \chi_B \, d\nu = \int_Y \psi \, d\nu.$$

Dalej pokazuje się, że $\mathcal{R}$ jest najmniejszą klasą monotoniczną zawierającą wszystkie prostokąty, a więc $\mathcal{R} = \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ $\square$

Możemy już teraz podać definicję miary produktowej. Załóżmy, że $(X, \mathcal{S}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ są przestrzeniami z miarami i miary te są σ–skończone.

Definicja 9.7. Dla $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ określamy *miarę produktową* $\mu \times \nu : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \to [0, \infty]$ wzorem

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y).$$

Równość dwu ostatnich całek wynika z poprzedniego twierdzenia. To, że powyższy wzór faktycznie określa miarę na $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ wynika z Twierdzenia 7.15.

9.3. **Twierdzenie Fubiniego.** Niech f będzie funkcją $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$–mierzalną i niech $\lambda = \mu \times \nu$ oznacza miarę produktową. Twierdzenie Fubiniego podaje warunki kiedy zachodzi równość

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\lambda(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Twierdzenie 9.8. *Niech $f : X \times Y \to [0, \infty]$ będzie funkcją $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$–mierzalną.*

(a) Jeżeli $f \geqslant 0$, oraz określimy $\varphi : X \to [0, \infty]$, $\psi : Y \to [0, \infty]$ wzorami

$$\varphi(x) = \int_Y f_x\, d\nu, \qquad \psi(y) = \int_X f^y\, d\mu, \tag{5}$$

to φ jest funkcją $\mathcal{S}$–mierzalną, ψ jest funkcją $\mathcal{T}$–mierzalną oraz

$$\int_X \varphi\, d\mu = \int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \psi\, d\nu. \tag{6}$$

(b) Jeżeli $f \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$, to $f_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$ dla prawie każdego $x \in X$ oraz $f^y \in \mathcal{L}^1(\mu)$ dla prawie każdego $y \in Y$, funkcje φ i ψ są określone prawie wszędzie na X i Y wzorem (5), oraz $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$ i $\psi \in \mathcal{L}^1(\nu)$ oraz zachodzi równość całek (6).

Uwaga.

(a) Założenie $f \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$ można nieco bardziej szczegółowo zapisać

$$\int_{X\times Y} |f(x,y)|\, d\lambda(x,y) < \infty,$$

a zgodnie z punktem (a) twierdzenia warunek ten jest równoważny każdemu z warunków

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty, \quad \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\, d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty.$$

(b) Zauważmy, że

$$\varphi(x) = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y), \qquad \psi(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x),$$

a więc równość (6) oznacza to samo co równość przed twierdzeniem.

Szkic dowodu. Jeżeli $f = \chi_E$, to mierzalność φ i ψ wynika z Twierdzenia 9.6, a równość (6) wynika z definicji miary produktowej.

Z prawdziwości pukntu (a) twierdzenia dla funkcji charakterystycznych i liniowości całki wynika, że (a) zachodzi dla funkcji prostych.

W ogólnym przypadku przybliżamy f niemalejącym ciągiem funkcji prostych i korzystamy z twierdzenia o zbieżności monotonicznej.

W dowodzie (b) korzystamy z równości $f = f^+ - f^-$ oraz stosujemy punkt (a) do każdej z funkcji f^+ i f^-. Z założenia o skończoności całki $\int |f| \, d\lambda$ wynika, że φ i ψ są określone p.w. na X i Y. □

10. Przestrzenie L^p

10.1. Nierówności Jensena, Höldera i Minkowskiego.

Definicja 10.1. Mówimy, że funkcja $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła, jeżeli dla dowolnych $x, y \in (a, b)$ oraz $\lambda \in [0, 1]$ spełniona jest nierówność

$$\varphi\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leqslant (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y).$$

Warunek z powyższej definicji jest równoważny następującemu: dla dowolnych $a < s < t < u < b$ zachodzi nierówność

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leqslant \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}. \tag{7}$$

Twierdzenie 10.2. *Jeśli φ jest wypukła na (a, b), to φ jest ciągła na (a, b).*

Twierdzenie 10.3 (Nierówność Jensena)**.** *Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą taką, że $\mu(X) = 1$. Niech $f : X \to (a, b)$ będzie funkcją całkowalną oraz φ będzie funkcją wypukłą na (a, b). Wtedy*

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leqslant \int_X \varphi \circ f d\mu.$$

Dowód. Oznaczmy $t = \int_X f d\mu$. Wtedy $t \in (a, b)$. Niech β oznacza kres górny ilorazów po lewej stronie nierówności (7) po wszystkich $s \in (a, t)$. Wtedy β jest nie większe niż każdy z ilorazów po prawej stronie, o ile $u \in (t, b)$. Zatem dla $s \in (a, b)$ mamy

$$\varphi(s) \geqslant \varphi(t) + \beta(s - t).$$

Zatem

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t) - \beta(f(x) - t) \geqslant 0$$

dla wszystkich $x \in X$. Ponadto φ jest funkcją ciągłą, a więc $\varphi \circ f$ jest funkcją mierzalną. Całkując stronami względem miary μ ostatnią nierówność otrzymamy

$$\int_X \varphi \circ f d\mu - \varphi(t)\mu(X) - \beta\left(\int_X f d\mu - t\mu(X)\right) \geqslant 0.$$

Ale z założenia $\mu(X) = 1$ oraz $\int_X f d\mu = t$. To daje nierówność Jensena. □

Definicja 10.4. Mówimy, że liczby $p, q > 0$ są wykładnikami sprzężonymi, jeżeli $p+q = pq$ lub równoważnie

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Na przykład, $p = q = 2$ są sprzężone. Ponadto 1 i ∞ również możemy rozważać jako sprzężone.

Twierdzenie 10.5. *Załóżmy, że p i q są wykłądnikami sprzężonymi oraz $p \in (1, \infty)$. Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą oraz $f, g : X \to [0, \infty]$ będą funkcjami mierzalnymi. Wtedy zachodzą:*

(a) nierówność Höldera

$$\int_X fg d\mu \leqslant \left[\int_X f^p d\mu\right]^{1/p} \left[\int_X g^q d\mu\right]^{1/q};$$

(b) nierówność Minkowskiego

$$\left[\int_X (f+g)^p d\mu\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_X f^p d\mu\right]^{1/p} + \left[\int_X g^p d\mu\right]^{1/p}.$$

Dla $p = q = 2$ otrzymujemy nierówność Schwarza

$$\left(\int_X fg d\mu\right)^2 \leqslant \int_X f^2 d\mu \int_X g^2 d\mu.$$

Dowód. (a) Niech

$$A = \left[\int_X f^p d\mu\right]^{1/p}, \quad B = \left[\int_X g^q d\mu\right]^{1/q}.$$

Jeżeli $A = 0$, to $f = 0$ p.w., a więc $fg = 0$ p.w. i nierówność Höldera jest spełniona. Jeżeli $A > 0$ oraz $B = \infty$, to nierównośc jest oczywista. Zakładamy zatem, że $A, B \in (0, \infty)$.

Oznaczmy

$$F = \frac{f}{A}, \quad G = \frac{g}{B}.$$

Wtedy

$$\int_X F^p d\mu = \int_X G^q d\mu = 1.$$

Wybierzmy dowolny $x \in X$ takie, że $F(x), G(x) \in (0, \infty)$. Wtedy istnieją liczby $s, t \in \mathbb{R}$ takie, że $F(x) = \mathrm{e}^{s/p}$ oraz $G(x) = \mathrm{e}^{t/q}$. Skoro $1/p + 1/q = 1$, to na mocy wypukłości funkcji wykładniczej mamy

$$\mathrm{e}^{s/p+t/q} \leqslant \frac{1}{p}\mathrm{e}^{s/p} + \frac{1}{q}\mathrm{e}^{t/q}.$$

Zatem dla każdego $x \in X$

$$F(x)G(x) \leqslant \frac{F(x)^p}{p} + \frac{G(x)^q}{q}.$$

Całkując stronami względem miary μ otrzymamy

$$\int_X FG d\mu \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Zatem $\int fgd\mu \leqslant AB$.

(b) Mamy

$$(f+g)^p = f\cdot(f+g)^{p-1} + g\cdot(f+g)^{p-1}.$$

Na mocy nierówności Höldera mamy

$$\int f\cdot(f+g)^{p-1}d\mu \leqslant \left[\int f^p d\mu\right]^{1/p}\left[\int (f+g)^{(p-1)q}d\mu\right]^{1/q}$$

oraz

$$\int g\cdot(f+g)^{p-1}d\mu \leqslant \left[\int g^p d\mu\right]^{1/p}\left[\int (f+g)^{(p-1)q}d\mu\right]^{1/q}.$$

Ale $(p-1)q = p$, a więc sumując dwie ostatnie nierówności mamy

$$\int (f+g)^p d\mu \leqslant \left[\int (f+g)^p\right]^{1/q}\left[\left\{\int f^p d\mu\right\}^{1/p} + \left\{\int g^p d\mu\right\}^{1/p}\right].$$

Jeżeli lewa strona jest równa 0 lub prawa równa ∞, to nierówność jest spełniona. W przeciwnym razie na mocy wypukłości funkcji $t \to t^p$ mamy

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \leqslant \frac{1}{2}\left(f^p + g^p\right).$$

Zatem, jeśli prawa strona jest skończona, to $\int (f+g)^p d\mu$ jest skończona. Dzieląc stronami przez pierwszy czynnik po prawej stronie otrzymujemy nierówność Minkowskiego. □

Uwaga. Równość w nierówności Höldera zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $c > 0$ takie, że $f^p = cg^q$ p.w. na X.

10.2. **Definicja przestrzeni L^p.** Ustalmy $p \geqslant 1$. Dla $f : X \to \mathbb{R}$ oznaczamy przez $\|f\|_p$ normę rzędu p funkcji f daną wzorem

$$\|f\|_p = \left\{\int |f|^p d\mu\right\}^{1/p}$$

oraz przestrzeń funkcji całkowalnych z p-tą potęgą przez

$$L^p(\mu) = \left\{f : \|f\|_p < \infty\right\}.$$

Uwaga. Załóżmy, że $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ jest zbiorem przeliczalnym. Wtedy każdą funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ możemy utożsamiać z ciągiem $(a_1, a_2, \dots)$, gdzie $a_i = f(x_i)$. Jeżeli μ jest miarą liczącą na X, tzn. $\mu(A) =$ liczebność zbioru A dla $A \subset X$, to

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = \sum_i a_i.$$

Wtedy $L^p(\mu)$ oznaczamy przez ℓ^p, a więc

$$\ell^p = \left\{a = (a_1, a_2, \dots) : \|a\|_p = \left(\sum |a_i|^p\right)^{1/p} < \infty\right\}.$$

Definicja 10.6. Przez $L^\infty(\mu)$ oznaczamy zbiór funkcji $\mathcal{S}$-mierzalnych ograniczonych prawie wszędzie względem μ (ograniczonych poza zbiorem miary zero). Przez $\|f\|_\infty$ oznaczamy kres dolny zbioru $\{M : |f| \leqslant M$ prawie wszędzie$\}$.

Twierdzenie 10.7. *Jeżeli p i q są wykładnikami sprzężonymi, $p \in [1,\infty]$, $f \in L^p(\mu)$ oraz $g \in L^q(\mu)$, to $fg \in L^1(\mu)$ oraz*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

Dowód. Dla $p \in (1,\infty)$ jest to po prostu nierówność Höldera.

Jeżeli $p = \infty$, to $q = 1$ oraz dla prawie każdego $x \in X$ mamy

$$|f(x)g(x)| \leqslant \|f\|_\infty |g(x)|.$$

Całkując stronami otrzymujemy $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1$. □

Twierdzenie 10.8. *Załóżmy, że $p \in [1,\infty]$ oraz $f, g \in L^p(\mu)$. Wtedy $f + g \in L^p(\mu)$ oraz*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Dla $p \in (1,\infty)$ jest to po prostu nierówność Minkowskiego. Dla $p = 1$ lub $p = \infty$ nierówność wynika z nierówności trójkąta $|f+g| \leqslant |f| + |g|$.

Oczywiście, jeśli $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $f \in L^p(\mu)$, to $\alpha f \in L^p(\mu)$, gdyż $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$. Zatem $L^p(\mu)$ jest przestrzenią liniową.

Ustalmy $p \in [1,\infty]$ i dla $f, g \in L^p(\mu)$ oznaczmy

$$d(f,g) = \|f-g\|_p .$$

Wtedy $d(g,f) = d(f,g)$ oraz na mocy nierówności Minkowskiego $d(f,h) \leqslant d(f,g) + d(g,h)$ dla dowolnych $f, g, h \in L^p(\mu)$. Ponadto $d(f,f) = 0$, ale $d(f,g) = 0$ nie implikuje $f = g$. Ale $d(f,g) = 0$ implikuje $f = g$ prawie wszędzie na X.

Jeżeli utożsamimy funkcje równe prawie wszędzie na X względem miary μ, to $L^p(\mu)$ jest przestrzenią metryczną z metryką d. Najważniejszą własnością tej przestrzeni jest jej **zupełność**: każdy ciąg Cauchy'ego elementów przestrzeni L^p jest zbieżny sensie metryki d do pewnego elementu przestrzeni L^p. Dokładniej, jeśli $f_1, f_2, \ldots \in L^p(\mu)$ oraz $\|f_n - f_m\|_p \to 0$ gdy $m, n \to \infty$, to istnieje $f \in L^p(\mu)$ takie, że $\|f_n - f\|_p \to 0$ gdy $n \to \infty$.

11. Twierdzenie Radona–Nikodyma

Niech $\mu, \lambda : \mathcal{S} \to [0,\infty]$ będą dwiema miarami dodatnimi na przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{S})$.

Definicja 11.1. Mówimy, że miara λ jest absolutnie ciągła względem miary μ, jeżeli dla każdego zbioru $E \in \mathcal{S}$

$$\mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(E) = 0.$$

Przykład 15.

(a) Jeżeli $f : X \to [0, \infty]$ jest funkcją $\mathcal{S}$–mierzalną, to wiemy już, że wzór

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{S},$$

określa miarę dodatnią na $\mathcal{S}$. Wtedy, jeżeli $\mu(E) = 0$, to $\lambda(E) = 0$. Zatem całka Lebesgue'a zadaje miarę absolutnie ciągłą względem miary μ.

(b) Jeżeli $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych, $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ oraz dla $E \subset \mathbb{R}$ określimy

$$\mu(E) = \#(E \cap \mathbb{N}),$$

to miara Lebesgue'a na $\mathbb{R}$ **nie jest** absolutnie ciągła względem μ. Na przykład, jeśli $E = (0, 1)$, to $m(E) = 1$, ale $E \cap \mathbb{N} = \varnothing$, a więc $\mu(E) = 0$.

Następujące twierdzenie Radona–Nikodyma jest stwierdze4niem odwrotnym do części (a) przykładu: każda miara absolutnie ciągła względem μ jest całką z pewnej nieujemnej funkcji $\mathcal{S}$–mierzalnej.

Twierdzenie 11.2. *Załóżmy, że $\mu, \lambda : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ są dwiema miarami dodatnimi σ–skończonymi na przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{S})$ oraz λ jest absolutnie ciągła względem μ. Wtedy istnieje nieujemna funkcja $\mathcal{S}$–mierzalna $g : X \to [0, \infty]$ taka, że*

$$\lambda(E) = \int_E g d\mu, \quad E \in \mathcal{S}.$$

Jeżeli $h : X \to [0, \infty]$ jest inną funkcją o tej własności, to $h = g$ prawie wszędzie na X.

Przykład 16. Załóżmy, że $X = [0, 2]$, $\mathcal{S} = \mathscr{B}([0, 2])$ oraz $\mu = m$ jest miarą Lebesgue'a na $[0, 2]$. Rozważmy σ–ciało $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, [0, 2], [0, 1], (1, 2]\}.$$

Każda funkcja $\mathcal{T}$–mierzalna jest postaci $a_1\chi_{[0,1]} + a_2\chi_{(1,2]}$.

Niech $f : [0, 2] \to [0, \infty]$ będzie dowolną funkcją borelowską. Określmy miarę $\lambda : \mathcal{T} \to [0, \infty]$ wzorem

$$\lambda(E) = \int_E f dm, \quad E \in \mathcal{T}.$$

Oczywiście, λ jest absolutnie ciągła względem μ na $\mathcal{T}$. Na mocy twierdzenia istnieje funkcja $g : [0, 2] \to [0, \infty]$ postaci

$$g = a_1\chi_{[0,1]} + a_2\chi_{(1,2]}$$

taka, że dla $E \in \mathcal{T}$ mamy

$$\int_E f dm = \int_E g dm = a_1 m([0, 1] \cap E) + a_2 m(E \cap (1, 2]).$$

W szczególności, dla $E = [0,1]$ oraz $E = (1,2]$ otrzymujemy

$$a_1 = \int_0^1 f dm, \quad a_2 = \int_1^2 f dm.$$

Na przykład, jeżeli $f(x) = x^2$, to $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{7}{3}$.

Jeżeli oznaczymy $\mu(f) = \int_X f d\mu$, to g możemy oznaczyć jako $g = \mu\,(f \mid \mathcal{T})$.