

# TEORIA MIARY I CAŁKI

## PYTANIA NA EGZAMIN USTNY

1. Przykłady używanych miar używanych w życiu codziennym i ich własności
2. Definicja ciała i  $\sigma$ -ciała zbiorów.
3. Przykład ciała, które nie jest  $\sigma$ -ciałem.
4. Przykłady  $\sigma$ -ciał.
5. Uzasadnij, że operacje mnogościowe na zbiorach mierzalnych dają zbiory mierzalne.
6. Sumy i iloczyny ciał i  $\sigma$ -ciał.
7. Własności operacji  $\sigma(\mathcal{K})$ .
8. Rodzina zbiorów borelowskich w  $\mathbb{R}$  oraz w dowolnej przestrzeni topologicznej
9. Przykłady zbiorów borelowskich na prostej.
10. Definicja i własności miary dodatniej.
11. Miara sumy wstępującego ciągu zbiorów lub iloczynu zstępującego ciągu.
12. Przestrzeń mierzalna, przestrzeń z miarą.
13. Przykłady miar.
14. Miary skończone,  $\sigma$ -skończone
15. Zbiory miary zero i ich własności
16. Zupełność miar.
17. Miara Lebesgue'a.
18. Zbiory borelowskie z zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a
19. Zbiór Vitali'ego
20. Zbiory miary Lebesgue'a zero.
21. Definicja i przykłady funkcji mierzalnych. Warunki równoważne mierzalności.
22. Mierzalność funkcji ciągłych
23. Operacje na funkcjach mierzalnych
24. Część dodatnia i ujemna funkcji i ich własności
25. Mierzalność granicy ciągu funkcji mierzalnych
26. Funkcje charakterystyczne, funkcje proste
27. Przybliżanie funkcji mierzalnych funkcjami prostymi.
28. Konstrukcja całki Lebesgue'a
29. Własności całki Lebesgue'a
30. Całka jako miara dodatnia
31. Metoda "indukcji dla funkcji rzeczywistych"
32. Co to znaczy "prawie wszędzie"? (przykłady)
33. Warunki, kiedy  $f = 0$  prawie wszędzie
34. Twierdzenie o zbieżności monotonicznej
35. Lemat Fatou
36. Twierdzenie o zbieżności ograniczonej
37. Porównanie całki Riemanna z całką Lebesgue'a
38. Funkcja całkowalna w sensie Lebesgue'a, ale niecałkowalna w sensie Riemanna.
39. Miary zewnętrzne i ich przykłady.
40. Warunek Caratheodory'ego i twierdzenie Caratheodory'ego.
41. Konstrukcja miary Lebesgue'a na prostej
42. Twierdzenie Caratheodory'ego o rozszerzaniu miary
43. Definicja i przykłady  $\sigma$ -ciał produktowych

44. Przekroje zbiorów i przekroje funkcji
45. Definicja miary produktowej
46. Twierdzenie Fubinięgo
47. Nierówności Jensena, Höldera i Minkowskiego
48. Definicja przestrzeni  $L^p$  jako przestrzeni metrycznej.
49. Miary absolutnie ciągłe
50. Twierdzenie Radona–Nikodyma.