TEORIA MIARY I CAŁKI

OBLICZANIE CAŁKI LEBESGUE'A

Zadanie 1. Rozważmy przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{S}, \mu)$, gdzie $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, a miara μ jest miarą liczącą (tzn. $\mu(A)$ jest równe ilości elementów zbioru A). Pokazać, że funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$$

oraz, że w tym przypadku dla $E \subset \mathbb{N}$

$$\int_E f d\mu = \sum_{n \in E} f(n).$$

Zadanie 2. Rozważmy tę samą przestrzeń mierzalną co w poprzednim zadaniu, przy czym teraz

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} u_n,$$

gdzie $\{u_n, n \geqslant 1\}$ jest dowolnym ciągiem liczb *nieujemnych*. Pokazać, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| u_n < \infty$$

oraz, że w tym przypadku

$$\int_E f d\mu = \sum_{n \in E} f(n) u_n.$$

Zadanie 3. (Zamiana zmiennych w całce Lebesgue'a) Niech $f : X \to Y$ będzie dowolną funkcją określoną na przestrzeni $(X, \mathcal{S}, \mu)$,

$$\mathcal{R} = \left\{ B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{S} \right\}$$

oraz

$$\nu(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right) \text{ dla } B \in \mathcal{R}.$$

Pokazać, że wówczas dla każdej funkcji $\mathcal{R}$-mierzalnej $g : Y \to [0, \infty]$ zachodzą wzory

$$\int_X g \circ f d\mu = \int_Y g d\nu$$

oraz dla $B \in \mathcal{R}$

$$\int_B g d\nu = \int_{f^{-1}(B)} g \circ f d\mu.$$

Wsk.: Rozważ najpierw przypadek, gdy g jest funkcją charakterystyczną, następnie prostą, nieujemną mierzalną i wreszcie dowolną całkowalną.

Zadanie 4. Pokazać, że jeżeli $\mu(E) < \infty$, a $\{f_n\}$ jest ciągiem funkcji $\mathcal{S}$-mierzalnych $f_n : E \to \mathbb{R}$, całkowalnych na zbiorze E oraz zbieżnym jednostajnie na E do funkcji $f : E \to \mathbb{R}$, to funkcja f jest całkowalna oraz

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Podać przykład, że założenia $\mu(E) < \infty$ nie można pominąć.

Zadanie 5. Załóżmy, że $\{f_n\}$ jest ciągiem funkcji $\mathcal{S}$-mierzalnych $f_n : E \to \mathbb{R}$ takim, że

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant f_3 \geqslant ... \geqslant 0,$$

oraz $f_1 \in \mathcal{L}(\mu)$. Pokazać, że jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Zadanie 6. Pokazać, że w twierdzeniach Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej i ograniczonej wystarczy założyć, że funkcje f_n, f są określone prawie wszędzie na zbiorze E oraz, że zbieżność $f_n(x) \to f(x), n \to \infty$ i nierówności

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant ...$$

$$|f_n| \leqslant g$$

zachodzą prawie wszędzie na X.

Zadanie 7. Sformułować i udowodnić wnioski z poprzedniego zadania dotyczące szeregów funkcyjnych.

Zadanie 8. Uzasadnij, że poniższe granice istnieją oraz wyznacz ich wartość:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \log(2+\cos(x/n))\, dx;$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n} \log(2+\cos(x/n))\, dx;$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \log(2+\cos(x/n))\, dx;$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty n e^{-nx} \sin(1/x)\, dx.$$

Zadanie 9. Załóżmy, że μ jest miarą dodatnią na $(X, \mathcal{S})$, $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją $\mathcal{S}$-mierzalną oraz $\int_X f d\mu = c$, gdzie $c > 0$. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right] d\mu = \begin{cases} \infty, & \text{gdy } 0 < \alpha < 1, \\ c, & \text{gdy } \alpha = 1, \\ 0, & \text{gdy } 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

Zadanie 10. Niech

$$f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{ll}1, & \text{dla } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{dla } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{array}\right. .$$

oraz $E=\left[a,b\right]$, i niech μ będzie miarą Lebesgue'a na $\left(\mathbb{R},\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\right)$. Obliczyć całkę Lebesgue'a $\int_E f d\mu$.

Zadanie 11. Niech

$$f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{q}, & \text{dla } x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\\ 1, & \text{dla } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{array}\right. .$$

oraz $E=\left[a,b\right]$, i niech μ będzie miarą Lebesgue'a na $\left(\mathbb{R},\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\right)$. Obliczyć całkę Lebesgue'a $\int_E f d\mu$.

Zadanie 12. Niech $X=\mathbb{N}$, $\mathcal{S}=\mathcal{P}\left(X\right)$ oraz

$$\mu\left(\{n\}\right)=\frac{1}{2^n},\ \text{dla } n=1,2,...$$

Oblicz całkę Lebesgue'a $\int_E f d\mu$ jeżeli:

(a) $f\left(n\right)=\frac{1}{3^n}$, $E=\mathbb{N}$;
(b) $f\left(n\right)=\frac{1}{n!}$, $E=\{2k:k\in\mathbb{N}\}$.

Zadanie 13. Niech $X=\left[0,\pi\right]$, $\mathcal{S}=\mathcal{B}\left(\left[0,\pi\right]\right)$ oraz dla $A\in\mathcal{S}$

$$\mu\left(A\right)=\int_A \sin x\, dx.$$

Obliczyć całkę $\int_E f d\mu$ jeżeli:

(a) (a) $f\left(x\right)=x^2$, $E=\left[0,\pi\right]$;
(b) (b) $f\left(x\right)=\sin x$, $E=\left[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{8}\right]$.

Zadanie 14. Oblicz wartość całki Lebesgue'a z funkcji

$$f(x)=\begin{cases}\log\left(\sin x\right), & \text{dla } x\in C;\\ \frac{3}{4^n}, & \text{na każdym z usuniętych przeddziałów o długości } \frac{1}{3^n}.\end{cases}$$

na przedziale $[0,1]$, gdzie C oznacza zbiór Cantora.

Zadanie 15. Oblicz wartość całki Lebesgue'a z funkcji

$$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{dla } x\in[0,\pi]\cap\mathbb{Q};\\ \sin x, & \text{dla } x\in[0,\pi]\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

na przedziale $\left[0,\pi\right]$.