# TEORIA MIARY I CAŁKI

DEFINICJA I WŁASNOŚCI CAŁKI LEBESGUE'A

**Zadanie 1. (Własności całki Lebesgue'a)** Pokazać, że prawdziwe są następujące stwierdzenia:

(a) jeżeli $f \equiv 0$ oraz $E \in \mathcal{S}$, to $\int_E f d\mu = 0$;

(b) jeżeli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją $\mathcal{S}$-mierzalną oraz $\mu(E) = 0$, to

$$\int_E f d\mu = 0;$$

(c) jeżeli $f, g : X \to \mathbb{R}$ są funkcjami $\mathcal{S}$-mierzalnymi oraz $0 \leqslant f \leqslant g$ na zbiorze $E \in \mathcal{S}$, to

$$\int_E f d\mu \leqslant \int_E g d\mu;$$

(d) jeżeli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją $\mathcal{S}$-mierzalną, $f \geqslant 0$ oraz $E, F \in \mathcal{S}$ i $E \subset F$, to

$$\int_E f d\mu \leqslant \int_F f d\mu;$$

(e) dla każdego $c \geqslant 0$

$$\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu.$$

**Zadanie 2.** Pokazać, że jeżeli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją $\mathcal{S}$-mierzalną,
$a \leqslant f(x) \leqslant b$ na zbiorze $E \in \mathcal{S}$ oraz $\mu(E) < \infty$, to

$$a\mu(E) \leqslant \int_E f d\mu \leqslant b\mu(E).$$

**Zadanie 3.** Udowodnić, że jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$, $A \subset B$ oraz $\mu(B \backslash A) = 0$, to

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu.$$

Wywnioskować stąd, że jeżeli $f, g : X \to \mathbb{R}$ są funkcjami $\mathcal{S}$-mierzalnymi oraz zbiór

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$$

ma miarę $\mu$ zero, to

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu.$$

**Zadanie 4.** Udowodnij, że dla dowolnej funkcji nieujemnej i mierzalnej $f : X \to \mathbb{R}$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int \min(f, n)\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

**Zadanie 5.** Udowodnić, że jeżeli $f \in \mathcal{L}(\mu)$, to także $|f| \in \mathcal{L}(\mu)$ oraz

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leqslant \int_X |f|\, d\mu$$

**Zadanie 6.** Udowodnić, że jeżeli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją $\mathcal{S}$-mierzalną oraz $|f| \leqslant g$, gdzie $g \in \mathcal{L}(\mu)$, to także $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

**Zadanie 7.** Pokazać, że jeżeli $f \in \mathcal{L}(\mu)$, a funkcja $g$ jest $\mathcal{S}$-mierzalna i ograniczona na $E$, to $fg \in \mathcal{L}(\mu)$.

**Zadanie 8.** Udowodnić, że jeżeli $f \geqslant 0$ oraz

$$\int_X f d\mu = 0,$$

to $f = 0$ prawie wszędzie na $X$.

**Zadanie 9.** Niech

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{dla } \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

oraz dla $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$f_{2k}(x) = g(x), \quad f_{2k+1}(x) = g(1-x).$$

Pokazać, że dla ciągu $\{f_n\}$ otrzymujemy w lemacie Fatou ostrą nierówność.

**Zadanie 10.** Pokazać, że jeżeli $\mu(E) < \infty$, ciąg $\{f_n\}$ jest jednostajnie ograniczony na zbiorze $E$ i

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in E,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

**Zadanie 11.** Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Dla $f, g : X \to \mathbb{R}$ określamy relację

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ p.w.}$$

Uzasadnij, że jest to relacja równoważności na zbiorze wszystkich funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{S}$–mierzalnych.

**Zadanie 12.** Dla $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ określamy odległość

$$\rho(f, g) = \int_X |f - g| \, d\mu.$$

Pokazać, że $(\mathcal{L}(\mu), \rho)$ jest przestrzenią metryczną, o ile utożsamimy funkcje równe prawie wszędzie.