TEORIA MIARY I CAŁKI

FUNKCJE MIERZALNE

Zadanie 1. (a) Udowodnić, że jeżeli $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją monotoniczną, a $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją $\mathcal{S}$–mierzalną, to $g \circ f$ jest również funkcją $\mathcal{S}$–mierzalną.
(b) Udowodnić, że jeżeli $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją borelowską, a $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją $\mathcal{S}$–mierzalną, to $g \circ f$ jest również funkcją $\mathcal{S}$–mierzalną.

Zadanie 2. Funkcją charakterystyczną zbioru $A \subset X$ nazywamy funkcję

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \in A \\ 0, & \text{dla } x \in X \setminus A \end{cases}.$$

Pokazać, że χ_A jest funkcją $\mathcal{S}$–mierzalną wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in \mathcal{S}$.

Zadanie 3. Pokazać, że funkcje

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

oraz

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{dla } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

są funkcjami $\mathcal{B}(\mathbb{R})$–mierzalnymi.

Zadanie 4. Niech X będzie przestrzenią metryczną i niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Pokazać, że f jest funkcją $\mathcal{B}(X)$–mierzalną.

Zadanie 5. Podać wszystkie funkcje $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{S}$–mierzalne, jeżeli $\mathcal{S} = \{\varnothing, X\}$ oraz jeżeli $S = \mathcal{P}(X)$.

Zadanie 6. Pokazać, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{S}$–mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $q \in \mathbb{Q}$ zbiór

$$\{x \in X : f(x) < q\} \in \mathcal{S}.$$

Wsk: Każda liczba rzeczywista jest granicą niemalejącego ciągu liczb wymiernych.

Zadanie 7. Udowodnić, że jeżeli f jest funkcją $\mathcal{S}$–mierzalną, to również $|f|$ jest funkcją $\mathcal{S}$-mierzalną. Podać przykład, że implikacja odwrotna nie musi być prawdziwa.

Zadanie 8. (a) Niech $\mathcal{S} = \{\varnothing, A, A^c, X\}$. Pokazać, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{S}$–mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona postaci

$$f(x) = a_1\chi_A(x) + a_2\chi_{A^c}(x)$$

dla pewnych stałych $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Niech $\mathcal{S} = \sigma(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\})$. Pokazać, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{S}$-mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona postaci

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)$$

dla pewnych stałych $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Zadanie 9. Niech $X = \mathbb{R}$ oraz $\mathcal{S} = \sigma(\{[n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\})$. Które z następujących funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są $\mathcal{S}$–mierzalne? Podaj przykłady innych funkcji zarówno mierzalnych jak i niemierzalnych względem $\mathcal{S}$.

(a) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$;
(b) $f(x) = [x]$, $x \in \mathbb{R}$;
(c) $f(x) = [x^2]$, $x \in \mathbb{R}$;
(d) $f(x) = [x]^2$, $x \in \mathbb{R}$;
(e) $f(x) = x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 10. Niech $f, g : X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami $\mathcal{S}$–mierzalnymi oraz $c \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że następujące zbiory są mierzalne:

(a) $\{x : f(x) < g(x)\}$;
(b) $\{x : f(x) \leqslant g(x)\}$;
(c) $\{x : f(x) = g(x)\}$;
(d) $\{x : f(x) = a\}$;
(e) $\{x : f(x) \neq a\}$.

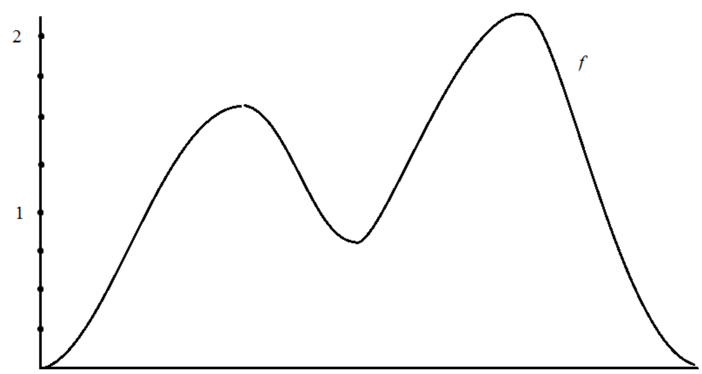
Zadanie 11. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji $\mathcal{S}$–mierzalnych. Udowodnij, że jeżeli

$$A = \left\{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ istnieje}\right\},$$

to $A \in \mathcal{S}$.

Zadanie 12. (a) Przeanalizuj dowód twierdzenia o przybliżaniu nieujemnej funkcji mierzalnej funkcjami prostymi i napisz wzór na s_n dla $n = 1, 2, 3$.

(b) Wykres funkcji $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ podany jest na poniższym rysunku. Przerysuj go jak najdokładniej, a następnie dorysuj funkcje s_1 oraz s_2.



(c) Wykonaj poprzednie polecenie dla innych wymyślonych przez siebie funkcji nieujemnych.