TEORIA MIARY I CAŁKI

MIARY ZEWNĘTRZNE. MIARA LEBESGUE'A

Zadanie 1. Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Określmy dla $A \subset X$

$$\mu^*(A) = \inf \{\mu(B) : A \subset B,\ B \in \mathcal{S}\} .$$

Udowodnij, że μ^* jest miarą zewnętrzną oraz, że każdy zbiór należący do $\mathcal{S}$ jest μ^*–mierzalny oraz, że $\mu^*(A) = \mu(A)$ dla $A \in \mathcal{S}$.

Zadanie 2. Niech $X = [0, 2)$, $\mathcal{S} = \{\varnothing, [0, 1), [1, 2), [0, 2)\}$ oraz $\mu([0, 1)) = \mu([1, 2)) = 1/2$. Określmy μ^* tak jak w poprzednim zadaniu.

(a) Oblicz miarę $\mu^*(\{a\})$ oraz $\mu^*((a, b))$ dla $0 \leqslant a < b < 2$.

(b) Uzasadnij, że $(0, 1)$ oraz $\{0\}$ nie są zbiorami μ^*–mierzalnymi.

Zadanie 3. Udowodnij, że miara Lebesgue'a każdego z przedziałów $[a, b)$ oraz (a, b) wynosi $b - a$.

Zadanie 4. Udowodnij, że zbiór Cantora ma miarę Lebesgue'a zero.

Zadanie 5. Niech m oznacza jednowymiarową miarę Lebesgue'a. Podaj przykład zbioru $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ takiego, że

(a) A jest nieograniczony, ale $m(A) = 1$;

(b) $m(\mathrm{int}(A)) = 1$, $m(A) = 2$ oraz $m(\bar{A}) = 3$.

Zadanie 6. Przeanalizuj konstrukcję jednowymiarowej miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}$, i spróbuj zmodyfikować tę konstrukcję tak, aby otrzymać k–wymiarową miarę Lebesgue'a w $\mathbb{R}^k$.

Zadanie 7. Ile wynosi 2–wymiarowa miara Lebesgue'a zbioru:

(a) odcinka łączącego punkty $(0, 0)$ i $(1, 1)$;

(b) prostej $L : y = x$;

(c) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, gdzie $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych;

(d) $C \times \mathbb{R}$, gdzie C jest zbiorem Cantora?