TEORIA MIARY I CAŁKI

MIARY DODATNIE I ICH WŁASNOŚCI

Zadanie 1. Pokazać, że dla dowolnego zbioru X funkcja $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ określona wzorem

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \varnothing \\ \infty, & \text{gdy } A \neq \varnothing \end{cases}$$

jest miarą dodatnią.

Zadanie 2. Pokazać, że dla dowolnego zbioru X funkcja $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ określona wzorem

$$\mu(A) = \begin{cases} m, & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem } m\text{–elementowym} \\ \infty, & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem nieskończonym} \end{cases}$$

jest miarą dodatnią.

Zadanie 3. Niech X będzie zbiorem nieprzeliczalnym, a $\mathcal{S}$ σ-ciałem złożonym ze wszystkich przeliczalnych podzbiorów zbioru X oraz ich dopełnień. Pokazać, że funkcja $\mu : \mathcal{S} \to [0,\infty]$ określona wzorem

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A \text{ jest przeliczalny} \\ 1, & \text{gdy } X \setminus A \text{ jest przeliczalny} \end{cases}$$

jest miarą dodatnią na $\mathcal{S}$.

Zadanie 4. (Własności miar dodatnich)
Załóżmy, że $\mu : \mathcal{S} \to [0,\infty]$ jest miarą dodatnią. Pokazać, że:

(a) jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$ oraz $A \subset B$, to $\mu(A) \leqslant \mu(B)$;

(b) jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$, $A \subset B$ oraz $\mu(A) < \infty$, to $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;

(c) dla dowolnego nieskończonego ciągu zbiorów $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$ zachodzi

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

a w szczególności dla $A, B \in \mathcal{S}$

$$\mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B);$$

(d) dla dowolnych $A, B \in \mathcal{S}$, jeżeli $\mu(A \cap B) < \infty$, to

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Zadanie 5. Mówimy, że $A \in \mathcal{S}$ jest *zbiorem miary zero* jeżeli $\mu(A) = 0$. Pokazać, że:

(a) jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$ są zbiorami miary zero, to również zbiór $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ jest zbiorem miary zero;

(b) jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$, $A \subset B$ oraz $\mu(B) = 0$, to $\mu(A) = 0$;

(c) jeżeli $A \in \mathcal{S}$ i $\mu(B) = 0$, to $\mu(A \cup B) = \mu(A)$ oraz $\mu(A \setminus B) = \mu(A)$;

(d) jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$ jest ciągiem zbiorów takim, że
$$\mu(A_i \cap A_j) = 0 \text{ dla } i \neq j,$$
to
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n);$$

(e) jeżeli μ jest miarą skończoną (tzn. $\mu(X) < \infty$) oraz $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$ jest ciągiem zbiorów takim, że $\mu(A_n) = \mu(X)$ dla $n = 1, 2, \ldots$, to
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(X).$$

Zadanie 6. Niech $X = \mathbb{N}$ oraz $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$. Niech ponadto $\{u_n\}$ będzie dowolnym ciągiem liczb nieujemnych.

(a) Określmy na $\mathcal{S}$ funkcję μ wzorem
$$\mu(A) = \sum_{n \in A} u_n.$$
Pokazać, że μ jest miarą na $\mathcal{S}$.

(b) Pokazać, że każda miara na zbiorze $\mathbb{N}$ musi być powyższej postaci dla pewnego ciągu liczb nieujemnych $\{u_n\}$.

(c) W szczególności, niech dla $A \subset \mathbb{N}$
$$\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n}.$$
Obliczyć $\mu(X)$, $\mu(A)$, $\mu(B)$ oraz $\mu(A \cup B)$ jeżeli $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 7. Niech $X = \mathbb{N}$ oraz $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$. Niech ponadto $\{u_n\}$ będzie ciągiem liczb nieujemnych takim, że $\sum u_n$ jest szeregiem zbieżnym. Określmy na $\mathcal{S}$ funkcję zbioru μ wzorem
$$\mu(A) = \begin{cases} \sum\limits_{n \in A} u_n, & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem skończonym,} \\ \infty, & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem nieskończonym} \end{cases}.$$

(a) Pokazać, że $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ dla dowolnych zbiorów rozłącznych $A, B \in \mathcal{S}$, ale mimo tego μ nie jest miarą na $\mathcal{S}$;

(b) Znaleźć ciąg zbiorów $\{A_n\}$ taki, że $A_n \subset A_{n+1}$, ale $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Zadanie 8. Niech $X = \mathbb{N}$, a $\mathcal{S}, \mu$ będą takie, jak w Zadaniu 2 i niech $E_n = \{k : k \geqslant n\}$. Pokazać, że
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Zadanie 9. Niech będzie dana przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{S}, \mu)$ oraz dowolna funkcja $f : X \to Y$; wówczas $\mathcal{R} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{S}\}$ jest σ-ciałem w Y. Pokazać, że funkcja $\nu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ dana wzorem
$$\nu(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right)$$
jest miarą na $\mathcal{R}$.

Zadanie 10. Pokazać, że:

(a) dla dowolnego ciągu zbiorów $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$ oraz dla dowolnej miary μ na $\mathcal{S}$

$$\mu\left(\liminf_n A_n\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right);$$

(b) jeżeli ponadto $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, to

$$\limsup_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right) \leqslant \mu\left(\limsup_n A_n\right);$$

(c) jeżeli ciag $\{A_n\}$ jest zbieżny i $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, to

$$\mu\left(\lim_n A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right).$$

Zadanie 11. Mówimy, że miara $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ jest *zupełna*, jeżeli dla dowolnych zbiorów $A, B \subset X$

$$A \subset B,\ \mu(B) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{S}.$$

Udowodnić, że każdą miarę $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ można "uzupełnić" w następujący sposób: oznaczmy

$$\mathcal{B} = \{B \subset X : B \subset A \text{ dla pewnego } A \in \mathcal{S} \text{ takiego, że } \mu(A) = 0\}$$

oraz

$$\mathcal{T} = \{A \cup B : A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{B}\}.$$

Wówczas rodzina $\mathcal{T}$ jest σ-ciałem w X i przyjmując dla $C \in \mathcal{T}$

$$\overline{\mu}(C) = \overline{\mu}(A \cup B) = \mu(A)$$

otrzymujemy funkcję zbioru, która jest miarą zupełną na $\mathcal{T}$.