TEORIA MIARY I CAŁKI

ZBIORY BORELOWSKIE

Zadanie 1. Uzasadnij dlaczego następujące zbiory są borelowskie w $\mathbb{R}$:

(a) przedział otwarty (a, b) ;

(b) zbiór jednopunktowy $\{a\}$;

(c) przedział domknięty $[a, b]$;

(d) przedziały nieskończone postaci $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$.

Zadanie 2. Uzasadnij, że zbiór $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych jest zbiorem borelowskim w $\mathbb{R}$, chociaż nie jest zbiorem ani domkniętym, ani otwartym w $\mathbb{R}$ (wynika stąd, że również zbiór liczb niewymiernych jest borelowski).

Zadanie 3. Niech $\mathcal{K}$ oznacza zbiór wszystkich sum skończonych lewostronnie otwartych przedziałów $I \subset \mathbb{R}$ (ograniczonych lub nieograniczonych). Uzasadnij, że:

(a) $\mathcal{K}$ jest ciałem, ale nie jest σ–ciałem w $\mathbb{R}$;

(b) $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}_1$ (σ–ciało zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$).

Zadanie 4. Niech $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ oznaczają odpowiednio rodziny przedziałów otwartych i domkniętych w $\mathbb{R}$. Uzasadnij, że $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}_1$.

Zadanie 5. Niech $\{f_n,\, n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem funkcji rzeczywistych ciągłych określonych na $\mathbb{R}$. Wykazać, że poniższe zbiory A, B i C są zbiorami borelowskimi w $\mathbb{R}$.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : \text{ciąg } \{f_n(x)\} \text{ jest zbieżny}\}$;

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$;

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : \text{ciąg } \{f_n(x)\} \text{ jest zbieżny do liczby niewymiernej}\}$

Zadanie 6. Dla dowolnego ciągu $\{A_n\}$ podzbiorów zbioru X określamy zbiory

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

(a) Uzasadnij, że $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.

(b) Jeżeli $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$, to mówimy, że ciąg $\{A_n\}$ jest *zbieżny*, a zbiór

$$\lim_n A_n = \liminf_n A_n = \limsup_n A_n$$

nazywamy *granicą* ciągu $\{A_n\}$. Uzasadnij, że każdy monotoniczny ciąg zbiorów jest zbieżny.

(c) Udowodnij, że jeżeli $\mathcal{S}$ jest σ–ciałem w X oraz $A_n \in \mathcal{S}$ dla każdego $n = 1, 2, \ldots$, to $\liminf_n A_n \in \mathcal{S}$ oraz $\limsup_n A_n \in \mathcal{S}$.

(d) Udowodnij, że jeżeli $G_n \in \mathcal{G}$ dla każdego $n = 1, 2, \ldots$, to $\limsup_n G_n \in \mathcal{G}_\delta$ oraz $\liminf_n G_n \in \mathcal{G}_{\delta\sigma}$.

Zadanie 7. Zbiór Cantora. Oznaczmy przez C zbiór powstały przez usunięcie z przedziału domkniętego $[0,1]$ przedziałów

$$E_0^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right);$$

$$E_1^1 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), E_1^2 = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right);$$

$$E_2^1 = \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right), E_2^2 = \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right), E_2^3 = \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right), E_2^4 = \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right), \text{ itd.}$$

Zbiór ten nazywamy *zbiorem Cantora*. Udowodnij, że:

(a) C jest zbiorem domkniętym (a zatem borelowskim);

(b) C składa się ze wszystkich liczb x postaci

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}, \text{ gdzie } c_n = 0 \text{ lub } 2.$$

(c) C jest zbiorem nieprzeliczalnym. (Wskazówka: Rozważ funkcję $f : C \to [0,1]$ daną wzorem $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} \frac{1}{2^n}$).

Zadanie 8. Niech $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ będzie dowolną klasą podzbiorów zbioru X. Oznaczmy:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\sigma &= \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n : D_n \in \mathcal{D} \text{ dla } n = 1, 2, \ldots \right\}, \\ \mathcal{D}_\delta &= \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n : D_n \in \mathcal{D} \text{ dla } n = 1, 2, \ldots \right\}. \end{aligned}$$

Udowodnij, że:

(a) $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\sigma$;

(b) $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\delta$;

(c) $(\mathcal{D}_\sigma)_\sigma = \mathcal{D}_\sigma, (\mathcal{D}_\delta)_\delta = \mathcal{D}_\delta$;

(d) jeżeli $\mathcal{D}$ jest σ–ciałem, to $\mathcal{D}_\delta = \mathcal{D}_\sigma = \mathcal{D}$.

Zadanie 9. Niech X będzie przestrzenią metryczną (ogólniej topologiczną) i niech $\mathcal{G}$ oznacza rodzinę zbiorów otwartych, a $\mathcal{F}$ rodzinę zbiorów domkniętych w X. Udowodnij, że:

(a) $\mathcal{F}_\delta = \mathcal{F}$; $\mathcal{G}_\sigma = \mathcal{G}$;

(b) $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}_\delta$; $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_\sigma$;

(c) $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{G}_\delta \subset \mathcal{B}(X)$.

Zadanie 10. Klasyfikacja zbiorów borelowskich.

Oznaczmy:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}; \quad \mathcal{F}^1 = \mathcal{F}_\sigma; \quad \mathcal{F}^2 = \mathcal{F}_{\sigma\delta}; \quad \mathcal{F}^3 = \mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma}; \ldots \\ &\mathcal{G}^0 = \mathcal{G}; \quad \mathcal{G}^1 = \mathcal{G}_\delta; \quad \mathcal{G}^2 = \mathcal{G}_{\delta\sigma}; \quad \mathcal{G}^3 = \mathcal{G}_{\delta\sigma\delta}; \ldots \end{aligned}$$

Zbiory klas $\mathcal{F}^n$ i $\mathcal{G}^n$ nazywamy zbiorami *borelowskimi rzędu* n. Udowodnij, że dla każdego $n \geqslant 1$:

(a) $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{B}(X)$; $\mathcal{G}^n \subset \mathcal{B}(X)$;

(b) $\mathcal{F}^{n-1} \subset \mathcal{F}^n$; $\mathcal{G}^{n-1} \subset \mathcal{G}^n$;

(c) $\mathcal{F}^{n-1} \subset \mathcal{G}^n$; $\mathcal{G}^{n-1} \subset \mathcal{F}^n$;

(d) jeżeli $\{A_n\}$ jest ciągiem zbiorów takim, że $A_n \in \mathcal{F}^n \setminus \mathcal{F}^{n-1}$ dla każdego $n \geqslant 1$, to zbiór

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

nie musi być zbiorem borelowskim żadnego skończonego rzędu.