TEORIA MIARY I CAŁKI

CIAŁA I σ–CIAŁA ZBIORÓW

Zadanie 1. Niech $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ będzie ciałem. Uzasadnij, że jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$, to:

(a) $A \cap B \in \mathcal{S}$;

(b) $A \setminus B \in \mathcal{S}$;

(c) $A \triangle B \in \mathcal{S}$.

Zadanie 2. Niech $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ będzie σ-ciałem. Uzasadnij, że jeżeli $A_i \in \mathcal{S}$ dla $i = 1, 2, \ldots$, to:

(a) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}$;

(b) $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$;

(c) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}$.

Zadanie 3. Załóżmy, że klasa $\mathcal{S}$ podzbiorów zbioru X spełnia warunki:

(i) $\varnothing \in \mathcal{S}$,

(ii) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{S}$.

Uzasadnij, że:

(a) jeżeli

$$A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S},$$

to $\mathcal{S}$ jest ciałem w X;

(b) jeżeli

$$A_i \in \mathcal{S}, \quad i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S},$$

to $\mathcal{S}$ jest σ-ciałem w X.

Zadanie 4. Załóżmy, że X jest zbiorem nieprzeliczalnym i oznaczmy przez $\mathcal{R}$ rodzinę wszystkich zbiorów $E \subset X$ takich, że albo E, albo $X \setminus E$ jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Udowodnij, że $\mathcal{R}$ jest σ–ciałem w zbiorze X.

Zadanie 5. Załóżmy, że X, Y są zbiorami, $\mathcal{S}$ jest σ—ciałem w X oraz, że $f : X \to Y$. Udowodnij, że

$$\mathcal{T} = \left\{ E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{S} \right\}$$

jest σ–ciałem w zbiorze Y.

Zadanie 6. Załóżmy, że X, Y są zbiorami, $\mathcal{T}$ jest σ–ciałem w Y oraz, że $f : X \to Y$. Udowodnij, że

$$\mathcal{S} = \left\{ f^{-1}(E) : E \in \mathcal{T} \right\}$$

jest σ–ciałem w zbiorze X.

Zadanie 7. Niech $\mathcal{S}$ będzie σ–ciałem w X oraz $E \in \mathcal{S}$. Udowodnij, że

$$\mathcal{S}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{S}\}$$

jest σ–ciałem w zbiorze X.

Zadanie 8. Niech X będzie dowolnym zbiorem.

(a) Udowodnij, że jeżeli $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ są σ–ciałami w X, to również $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ jest σ–ciałem w zbiorze X.

(b) Udowodnij, że jeżeli $\mathcal{S}_t$ jest σ–ciałem w X dla każdego $t \in T$, to również

$$\mathcal{S} = \bigcap_{t \in T} \mathcal{S}_t$$

jest σ–ciałem w zbiorze X.

(c) Udowodnij, że jeżeli $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ jest dowolną niepustą rodziną podzbiorów zbioru X, to istnieje najmniejsze σ–ciało $\sigma(\mathcal{K})$ zawierające rodzinę $\mathcal{K}$.

Zadanie 9. Wykazać, że:

(a) jeżeli $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$, to $\sigma(\mathcal{K}_1) \subset \sigma(\mathcal{K}_2)$;

(b) jeżeli $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ i $\mathcal{S}$ jest σ–ciałem w X, to $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{S}$;

(c) jeżeli $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \sigma(\mathcal{K}_1)$, to $\sigma(\mathcal{K}_1) = \sigma(\mathcal{K}_2)$.

Zadanie 10. Niech A, B, C będą podzbiorami zbioru X. Wypisać $\sigma(\{A\})$, $\sigma(\{A, B\})$ oraz $\sigma(\{A, B, C\})$.

Zadanie 11. Niech X będzie dowolnym zbiorem oraz $A, B \subset X$, przy czym $A \neq B$. Niech $\mathcal{S}_1 = \sigma(\{A\})$ oraz $\mathcal{S}_2 = \sigma(\{B\})$. Czy $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ jest σ–ciałem?

Zadanie 12. Niech $X = [0, 1]$. Wypisz wszystkie elementy σ–ciała $\sigma(\mathcal{K})$, jeżeli

$$\mathcal{K} = \{[0, 1/4), \{1/2\}, [1/2, 1]\}$$

Zadanie 13. Załóżmy, że $\{A_i, i = 1, 2, \dots\}$ jest rodziną podzbiorów zbioru X taką, że

$$A_i \cap A_j = \varnothing \text{ dla } i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X.$$

Uzasadnij, że

$$\sigma(\{A_i, i = 1, 2, \dots\}) = \left\{\bigcup_{i \in A} A_i : A \subset \mathbb{N}\right\}.$$

Zadanie 14. Korzystając z wyniku poprzedniego zadania uzasadnij, że dowolne σ–ciało ma albo 2^n elementów dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ albo ma nieprzeliczalnie wiele elementów.

Zadanie 15. Niech X będzie zbiorem nieskończonym. Uzasadnij, że klasa $\mathcal{S}$ złożona ze wszystkich zbiorów $A \subset X$ skończonych oraz ich dopełnień jest ciałem, ale nie jest σ–ciałem w X.