ZAAWANSOWANE ZAGADNIENIA MATEMATYKI AKTUARIALNEJ

ZESTAW 3

Zadanie 1. Dane sa $q_{60} = 0.2$, $q_{61} = 0.25$, $q_{62} = 0.25$, $q_{63} = 0.3$ oraz $q_{64} = 0.4$. Oblicz:

(a) wartości ℓ_x dla $x = 61, \ldots, 65$, jeżeli $\ell_{60} = 1000$;

(b) prawdopodobieństwo tego, że osoba wieku 61 lat umrze w wieku pomiędzy 62 a 64 lata;

(c) prawdopodobieństwo tego, że 62–latek dożyje do wieku 65 lat;

(d) wartości e_x dla $x = 60, \ldots, 64$, jeżeli $e_{65} = 0.8$.

Zadanie 2. Dane są ${}_5p_{40} = 0.8$, ${}_{10}p_{45} = 0.6$ oraz ${}_{10}p_{55} = 0.4$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że 40–latek umrze w wieku pomiędzy 55 a 65 lat.

Zadanie 3. Załóżmy, że z typowej grupy 100 ludzi w wieku 70 lat, 10 osób umrze w ciągu pierwszego roku, 15 osób — w ciągu drugiego, a 20 — w ciągu trzeciego roku. Oblicz q_{70}, q_{71}, q_{72} oraz ${}_3p_{70}$.

Zadanie 4. Załóżmy, że

$$\ell_x = 100 - x, \qquad x = 0, 1, \ldots, 100.$$

Znajdź wyrażenia dla ${}_np_x$, ${}_nq_x$ oraz ${}_{n|k}q_x$.

Zadanie 5. Dane są $e_{60} = 17$, ${}_{10}p_{50} = 0.8$ oraz $e_{50:\overline{10}|} = 9.2$. Oblicz e_{50}.

Zadanie 6. Udowodnij następujące przybliżenie oraz podaj intuicyjne uzasadnienie

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{2}q_x + p_x(1 + \mathring{e}_{x+1}).$$

Zadanie 7. Załóżmy, że $q_x = q$ dla wszystkich x (zatem $\omega = \infty$). Wyznacz wzory na ${}_np_x$ oraz e_x. Czy w ten sposób otrzymujemy realistyczną tablicę trwania życia?

Zadanie 8. Wykonaj następujące polecenia przy użyciu arkusza kalulacyjnego.

(a) Skonstruuj tablicę trwania życia przyjmując

$$q_x = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-0.00005(1.09)^x}, & \text{dla } x = 0, 1, \ldots, 118, \\ 1, & \text{dla } x = 119. \end{cases}$$

(b) Stosując zależność rekurencyjną wyznacz wartości e_x dla $x = 0, 1, \ldots, 119$.

(c) Jak zmieni się e_0, jeżeli 0.00005 zmienimy na 0.00006?

(d) Jak zmieni się e_0, jeżeli 1.09 zmienimy na 1.092?

Zadanie 9. Przujmijmy stopę procentową $i = 5\%$. Korzystając z tablic trwania życia GUS wykonaj następujące polecenia:

(a) wyznacz wartości d_x, dla $x = 0, 1, 2, \ldots,$

(b) wyznacz wysokość jednorazowych składek netto A_x w ubezpieczeniu x–latka na całe życie dla $x = 0, 1, 2, \ldots,$

(c) wyznacz wartości obecne $\ddot{a}_x$ rent życiowych dla $x = 0, 1, 2, \ldots,$

(d) wyznacz wysokość składek okresowych P_x w ubezpieczeniu x–latka na całe życie dla $x = 0, 1, 2, \ldots.$

Wykonaj powyższe obliczenia przy użyciu tablic zarówno dla mężczyzn, jak i dla kobiet.

Zadanie 10. Przyjmijmy stopę procentową $i = 6\%$. Korzystając z tablic trwania życia GUS skonstruuj tablicę funkcji komutacyjnych D_x, C_x, M_x i N_x, dla $x = 0, 1, 2, \ldots, n$. Wykonaj obliczenia zarówno dla mężczyzn, jak i dla kobiet.