ZAAWANSOWANE ZAGADNIENIA MATEMATYKI AKTUARIALNEJ

ZESTAW 2

Zadanie 1. Dana jest funkcja dyskonta v taka, że $v(1,3) = 0.9$, $v(3,6) = 0.8$ oraz $v(8,6) = 1.2$.

(a) Ile należy zainwestować w chwili 1, aby w chwili 8 mieć 10 PLN?

(b) Jeśli zainwestujemy 100 PLN w chwili 3, to ile będziemy mieć w chwili 8?

Zadanie 2. Załóżmy, że $v(t) = 2^{-t}$ oraz dane są wektory przepływów $\mathbf{c} = (1,2,3)$ oraz $\mathbf{d} = (2,K,1)$. Wyznacz wartość K tak, aby wektory $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$ były równoważne aktuarialnie względem v.

Zadanie 3. Dane są stopy procentowe $i_0 = i_1 = 0.25$, $i_2 = i_3 = 1$. Bierzesz udział w transakcji finansowej, w której otrzymasz 2 w chwili 0, 5 w chwili 3 oraz 10 w chwili 4, w zamian płatność 3 w chwili 2. Zamiast wszystkich powyższych przepływów zaoferowano Ci pojedynczą kwotę w chwili 1. Jaka jest najniższa kwota, którą zaakceptujesz?

Zadanie 4. Dane są stopy dyskontowe $d_k = 1/3$ dla $k = 0,1,2$, oraz $d_k = 1/4$ dla $k = 3,4$ oraz wektor przepływów $\mathbf{c} = (6_2, 9_3, 12)$. Wyznacz wektor dyskonta $\mathbf{v}$, $\ddot{a}(\mathbf{c})$ oraz $\mathrm{Val}_2(\mathbf{c})$.

Zadanie 5. Niech $\mathbf{c} = (1,2,4,-3,8,-12)$. Załóżmy, że $v(0,1) = v(1,2) = 0.8$, $v(2,3) = v(3,4) = 0.75$ oraz $v(4,5) = 0.5$. Oblicz $B_3(\mathbf{c})$ oraz ${}_3V(\mathbf{c})$.

Zadanie 6. Funkcja dyskonta v spełnia zależność

$$v(k) = 2^{-k}\left(1 - \frac{k}{6}\right), \quad k = 0,1,\ldots,5.$$

Dla wektora przepływów $\mathbf{c} = (1,-2,4,3,-3,-5)$ wyznacz $B_3(\mathbf{c})$ oraz ${}_3V(\mathbf{c})$.

Zadanie 7. Dane są ${}_8V(\mathbf{c}) = 100$, $c_8 = 60$, $c_9 = 70$, $v(8,9) = 0.8$, $v(9,10) = 0.75$, $v(0,10) = 0.5$ oraz $\ddot{a}(\mathbf{c}) = 40$. Oblicz $B_{10}(\mathbf{c})$ oraz ${}_{10}V(\mathbf{c})$.

Zadanie 8. Dany jest wektor przepływów $\mathbf{c} = (1, 2_2, 7_3)$ oraz funkcja dyskonta taka, że $v(k) = 1 - k/10$ dla $k = 0,1,\ldots,n$. Wyznacz:

(a) $v \circ 3(k)$ dla $k = 0,1,2$;

(b) wektory ${}_3\mathbf{c}$ i $\mathbf{c} \circ 3$;

(c) wartości obecne $\ddot{a}(\mathbf{c}; v)$, $\ddot{a}({}_3\mathbf{c}; v)$ oraz $\ddot{a}(\mathbf{c} \circ 3; v \circ 3)$.

Sprawdź, czy w tym przypadku zachodzi wzór (B) z wykładu.

Zadanie 9. Określmy funkcję dwóch zmiennych $s, t \geqslant 0$ wzorem

$$v(s,t) = \begin{cases} [1+(t-s)]^{-1}, & \text{dla } s \leqslant t, \\ 1+(s-t), & \text{dla } s \geqslant t. \end{cases}$$

Udowodnij, że v nie jest funkcja dyskonta.

Zadanie 10. Udowodnij, że dla dowolnej funkcji $g : [0,\infty) \to (0,\infty)$, funkcja

$$v(s,t) = \frac{g(t)}{g(s)}$$

jest funkcją dyskonta.

Zadanie 11. Załóżmy, że v_1 oraz v_2 są funkcjami dyskonta. Czy $v_1 v_2$ lub $v_1 + v_2$ są funkcjami dyskonta?

Zadanie 12. Załóżmy, że $v(2,7) = 0.5$, $v(2,8) = 0.4$, $v(2,9) = 0.3$. Wyznacz wektor $\mathbf{d}$ równoważny aktuarialnie wektorowi $\mathbf{c} = (1,3,5,2,9,10,6,4,8,3)$ taki, że $d_i = c_i$ dla $i < 7$ oraz $d_i = 0$ dla $i > 7$.

Zadanie 13. Pożyczka w wysokości 2300 PLN ma być spłacona w n corocznych ratach w wysokości zaczynając od chwili 5. Pożyczkobiorca dostaje opcję spłaty w wysokości 115 PLN w chwili 5, ale potem musi co roku spłacać raty po 240 PLN. Wyznacz wartość $v(5)$.

Zadanie 14. Dla pewnego wektora przepływów $\mathbf{c}$ mamy $c_0 = 1$, $c_1 = 5$ oraz $\ddot{a}(\mathbf{c}) = 15$. Jeżeli funkcję v zastąpimy nową funkcją dyskonta taką, że $v(1,2)$ jest pomniejszone o 0.1 podczas, gdy wszystkie inne wartości $v(n,n+1)$ pozostają niezmienione, to $\ddot{a}(\mathbf{c})$ zmaleje o 2.4. Z drugiej strony, jeżeli $v(0,1)$ zmaleje o 0.1, a inne wartości $v(n,n+1)$ pozostaną bez zmian, to $\ddot{a}(\mathbf{c})$ zmaleje o 2. Wyznacz $v(0,1)$ oraz $v(1,2)$.

Zadanie 15. Wektory $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$ sa równoważne aktuarialnie oraz $\mathbf{c}$ jest stały, a $\mathbf{d}$ jest niemalejący. Udowodnij, że $\mathrm{Val}_k(\mathbf{c}-\mathbf{d}) \geqslant 0$ dla $k = 0,1,\ldots,N$.

Zadanie 16. Dane są stopy procentowe $i_k = 0.1$ dla $k = 0,1,\ldots,9$, dyskontowe $d_k = 0.05$ dla $k = 10,\ldots,29$ oraz wektor $\mathbf{c} = (2_{15}, (-3)_5, 1_{10})$. Przy użyciu arkusza kalulacyjnego wyznacz:

(a) wektor dyskonta $\mathbf{v}$;
(b) wartość obecną $\ddot{a}(\mathbf{c})$;
(c) wartości $\mathrm{Val}_5(\mathbf{c})$ i $\mathrm{Val}_{15}(\mathbf{c})$
(d) bilanse $B_{10}(\mathbf{c})$ i $B_{20}(\mathbf{c})$;
(e) rezerwy ${}_5V(\mathbf{c})$ i ${}_{25}V(\mathbf{c})$;
(f) wartości $\mathrm{Val}_k(\mathbf{c})$, bilanse $B_k(\mathbf{c})$ i rezerwy ${}_kV(\mathbf{c})$ dla dowolnego $k = 0,1,\ldots,30$.

Zadanie 17. Przy użyciu arkusza kalulacyjnego wyznacz wysokość 30–letniej pożyczki wiedząc, że spłata ma być dokonywana przez pierwsze 15 lat po 1000 rocznie, a przez następne 15 lat po 500 rocznie. Ponadto prognozowane stopy procentowe wynoszą 7% przez pierwsze 10 lat, 5% przez następne 10 lat oraz 10% przez ostatnie 10 lat.