# OZNACZENIA I WZORY

## 1. Ogólny model matematyki finansowej

Funkcja dyskonta

- $v(s,t)v(t,u) = v(s,u)$, dla dowolnych $s,t,u$;
- $v(t) = v(0,t)$;
- $v(s,t) = \frac{v(t)}{v(s)}$ dla dowolnych $s,t$;
- $\mathbf{v} = [v(0), v(1), \ldots, v(N)]$.

Wartość obecna

$$\ddot{a}(\mathbf{c}; v) = \sum_{k=0}^{N} c_k v(k).$$

Wartość w chwili $n$

$$\mathrm{Val}_n(\mathbf{c}; v) = \sum_{k=0}^{N} c_k v(n,k).$$

Bilans i rezerwa w chwili $k$

$$B_k(\mathbf{c}; v) = \mathrm{Val}_k({}_k\mathbf{c}; v) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j v(k,j).$$

$${}_kV(\mathbf{c}; v) = -\mathrm{Val}_k({}^k\mathbf{c}; v) = -\sum_{j=k}^{N} c_j v(k,j).$$

$$\mathrm{Val}_k(\mathbf{c}) = B_k(\mathbf{c}) - {}_kV(\mathbf{c}),$$

Wzory rekurencyjne

$$B_{k+1}(\mathbf{c}) = (B_k(\mathbf{c}) + c_k)\, v(k+1,k), \quad B_0(\mathbf{c}) = 0;$$

$${}_{k+1}V(\mathbf{c}) = ({}_kV(\mathbf{c}) + c_k)\, v(k+1,k), \quad {}_0V(\mathbf{c}) = -\ddot{a}(\mathbf{c}).$$

Przesunięcie w czasie

- $(\mathbf{c} \circ k)_n = c_{n+k}$;
- $v \circ k(n,m) = v(n+k, m+k)$;
- $\mathrm{Val}_k({}^k\mathbf{c}) = \ddot{a}(\mathbf{c} \circ k; v \circ k)$;

Tożsamość podziału

$$\ddot{a}(\mathbf{c}) = \ddot{a}({}_k\mathbf{c}) + v(k)\,\mathrm{Val}_k({}^k\mathbf{c}) = \ddot{a}({}_k\mathbf{c}; v) + v(k)\ddot{a}(\mathbf{c} \circ k; v \circ k)$$

## 2. Tablice trwania życia

Prawdopodobieństwa przeżycia i śmierci

- ${}_np_x = \dfrac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$;
- ${}_nq_x = \dfrac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x}$;
- ${}_{n|k}q_x = \dfrac{\ell_{x+n} - \ell_{x+n+k}}{\ell_x} = {}_np_x - {}_{n+k}p_x = {}_np_x\, {}_kq_{x+n}$
- $d_x = \ell_x q_x$, $\ell_{x+1} = \ell_x - d_x$

Reguła mnożenia: ${}_{n+k}p_x = {}_np_x\, {}_kp_{x+n}$

Oczekiwany czas życia

- $$e_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} \frac{\ell_{x+k}}{\ell_x} = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} {}_kp_x.$$
- $\mathring{e}_x = e_x + \frac{1}{2}$;
- $e_x = p_x(1 + e_{x+1})$;
- $$e_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ell_{x+k}}{\ell_x} = \sum_{k=1}^{n} {}_kp_x,$$
- $\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = e_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{2}{}_nq_x$

## 3. Renty życiowe

Wartość obecna

$$\ddot{a}_x(\mathbf{c}) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} c_k v(k)\, {}_kp_x.$$

Zdyskontowana funkcja przeżycia

- $y_x(n) = v(n)\, {}_np_x$;
- $\ddot{a}_x(\mathbf{c}) = \ddot{a}(\mathbf{c}; y_x)$.

Oznaczenie $\ddot{a}_{\{x\}+k}(\mathbf{c})$

$$\ddot{a}_{\{x\}+k}(\mathbf{c}) = \sum_{j=0}^{\omega-x-k-1} c_j\, v \circ k(j)\, {}_jp_{x+k}.$$

Tożsamość podziału dla rent życiowych

$$\ddot{a}_x(\mathbf{c}) = \ddot{a}_x({}_k\mathbf{c}) + y_x(k)\ddot{a}_{\{x\}+k}(\mathbf{c} \circ k).$$

Renta odroczona: $\ddot{a}_x(0_k, \mathbf{d}) = y_x(k)\ddot{a}_{\{x\}+k}(\mathbf{d})$.

Świadczenia gwarantowane: jeżeli $\mathbf{u} = (0_g, \mathbf{w})$, to

$${}_gp_x\, \ddot{a}(\mathbf{u}; v) = v(g)\, {}_gp_x\, \ddot{a}(\mathbf{w}; v \circ g),$$

## 4. Ubezpieczenia na życie

Składka jednorazowa

$$A_x(\mathbf{b}) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} b_k v(k+1)_k p_x \, q_{x+k}.$$

Wyznaczanie składek okresowych

$$\pi_0 \ddot{a}_x(\boldsymbol{\rho}) = A_x(\mathbf{b}) + \ddot{a}_x(\mathbf{c}) + v(g)_g p_x \ddot{a}(\mathbf{w}; v).$$

Ubezpieczenie jako renta życiowa

$$A_x(\mathbf{b}) = \ddot{a}_x(\mathbf{w}_x * \mathbf{b}),$$

gdzie $\mathbf{w}_x$ oznacza wektor o $k$ tej współrzędnej $(w_x)_k = v(k, k+1)q_{x+k}$
Tozsamość podziału dla ubezpieczeń

$$A_x(\mathbf{b}) = A_x({}_k\mathbf{b}) + y_x(k) A_{\{x\}+k}(\mathbf{b} \circ k),$$

Ogólna tożsamość dla rent i ubezpieczeń

$$A_x(\mathbf{b}) = \ddot{a}_x(\Delta\mathbf{b}) - \ddot{a}_x(\mathbf{d} * \mathbf{b}).$$

## 5. Rezerwy ubezpieczeń i rent

Łączny wektor przepływów: $\mathbf{f} = \boldsymbol{\pi} - \mathbf{b} * \mathbf{w}_x - \mathbf{c}$
Rezerwa w chwili $k$ (wzór prospektywny)

$$\begin{aligned} {}_kV &= {}_kV(\mathbf{f}; y_x) = -\operatorname{Val}_k({}^k\mathbf{f}; y_x) \\ &= \frac{1}{y_x(k)} \left[ A_x({}^k\mathbf{b}) + \ddot{a}_x({}^k\mathbf{c}) - \ddot{a}_x({}^k\boldsymbol{\pi}) \right] \\ &= A_{\{x\}+k}(\mathbf{b} \circ k) + \ddot{a}_{\{x\}+k}(\mathbf{c} \circ k) - \ddot{a}_{\{x\}+k}(\mathbf{c} \circ k). \end{aligned}$$

Rezerwa w chwili $k$ (wzór retrospektywny)

$${}_kV(\mathbf{f}; y_x) = B_k(\mathbf{f}; y_x) = \frac{1}{y_x(k)} [\ddot{a}_x({}_k\boldsymbol{\pi}) - \ddot{a}_x({}_k\mathbf{c}) - A_x({}_k\mathbf{b})].$$

Wzory rekurencyjne ($\mathbf{c} = 0$)

$$\begin{aligned} {}_{k+1}V &= \left[{}_kV + \pi_k - b_k v(k, k+1) q_{x+k}\right] y_x(k+1, k) \\ {}_{k+1}V &= ({}_kV + \pi_k) \frac{1 + i_k}{p_{x+k}} - b_k \frac{q_{x+k}}{p_x + k} \\ {}_{k+1}V &= ({}_kV + \pi_k)(1 + i_k) - q_{x+k}(b_k - {}_{k+1}V). \end{aligned}$$

Rozkład składki na część ryzykowną i oszczędnościową

$$\pi_k = v(k, k+1) q_{x+k} \eta_k + \left[ v(k, k+1)_{k+1}V - {}_kV \right].$$

gdzie $\eta_k = b_k - {}_{k+1}V$