PŁATNOŚCI WIELOKROTNE W CIĄGU ROKU

M. BIENIEK

1. Oznaczenia

Do tej pory rozważaliśmy przepływy, w których płatności były dokonywane w chwilach $0, 1, 2, \dots$ będących liczbami całkowitymi. Zajmiemy się teraz płatnościami, które mogą pojawić się wielokrotnie w ciągu roku. Załóżmy więc, że przy ustalonym $m \in \mathbb{N}$ pewien wektor daje płatności m razy w ciągu roku, a więc w chwilach

$$k, k + \frac{1}{m}, k + \frac{2}{m}, \dots, k + \frac{m-1}{m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

W praktyce najbardziej interesujący jest przypadek, gdy $m = 12$, a więc płatności dokonywane są co miesiąc. Jednakże warto rozważać dowolne wartości m, gdyż na przykład duże wartości m można interpretować jako płatności dokonywane w sposób ciągły.

Będziemy się zajmować jedynie przepływami, w których wypłaty dokonywane w ciągu całego roku są takie same, chociaż ich wysokość może być inna w każdym roku. Zakładamy więc, że dany jest wektor przepływów $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_N)$, gdzie tak jak poprzednio c_k oznacza całkowitą kwotę płatną w $k+1$–ym roku, czyli pomiędzy chwilami k oraz $k+1$. Jednakże zamiast pojedynczej płatności c_k w chwili k, płatności dokonywane są m razy w ciągu roku, a więc wynoszą

$$\frac{c_k}{m} \quad \text{w chwili } k + \frac{j}{m}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Niech y oznacza dowolna funkcję dyskonta. Wartość obecną powyższego wektora przepływów $\mathbf{c}$ oznaczamy przez $\ddot{a}^{(m)}(\mathbf{c}; y)$. Chcemy najpierw podać zależność pomiędzy $\ddot{a}^{(m)}(\mathbf{c}, y)$ oraz $\ddot{a}(\mathbf{c}; y)$. Zauważmy najpierw, że w tym celu wystarczy znaleźć wzór na $\ddot{a}^{(m)}(\mathbf{c}; y)$ w przypadku, gdy $\mathbf{c} = \mathbf{e}^0 = (1, 0_\infty)$. Jeżeli przez u_k oznaczymy wartość w chwili k, ciągu płatności po $1/m$ w chwilach $k + j/m$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, to

$$u_k = \ddot{a}^{(m)}(\mathbf{e}^0; y \circ k).$$

Zatem możemy zastąpić płatności pomiędzy chwilami k i $k+1$ przez pojedynczą płatność $c_k u_k$ w chwili k. Zatem

$$\ddot{a}^{(m)}(\mathbf{c}; y) = \ddot{a}(\mathbf{c} * \mathbf{u}; y),$$

gdzie $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$. Zatem w obliczeniach związanych z renatmi płatnymi m–krotnie, kluczowe jest wyznaczenie współczynników $u_0, u_1, u_2, \dots$.

2. Ogólne renty m–krotne

Załóżmy, że dane są stopy procentowe $i_0, i_1, i_2, \dots$ w kolejnych latach oraz, że rozważamy płatności co $1/m$–tą część roku. Będziemy oznaczać primami wielkości odnoszące się do $1/m$–tej roku, a więc będziemy pisać v', i' oraz d' zamiast v, i oraz d. Aby wyznaczyć stopy procentowe w ciągu jednego podokresu będziemy zakładać, że stopa procentowa jest stała w ciągu każdego ustalonego roku. Zatem, dla każdego ustalonego $k = 0, 1, 2, \dots$, jeśli $s, t, s+h, t+h \in [k, k+1)$

$$v(s, s+h)v(t, t+h).$$

Niech i'_k oznacza stałą wartość $v(s+1/m, s) - 1$ oraz d'_k oznacza stałą wartość $1 - v(s, s+1/m)$ dla $k \leqslant s < s+1/m < k+1$. Kwota 1 w chwili 0 zakumuluje do wartości $1 + i'_k$ w chwili $1/m$, a potem do $(1+i'_k)^2$ w chwili $2/m$, i tak dalej. Zatem

$$(1+i'_k)^m = 1 + i_k,$$
$$(1-d'_k)^m = 1 - d_k,$$

gdyż obydwie strony pierwszego równania opisuje wartość w chwili $k+1$ jednostki zainwestowanej w chwili k, a obydwie strony drugiego równania opisują wartość w chwili k jednostki płatnej w chwili $k+1$. Wielkości

$$i_k^{(m)} = m i'_k, \quad d_k^{(m)} = m d'_k$$

nazywamy stopami nominalnymi, a i_k oraz d_k nazywamy stopami efektywnymi. W przypadku, gdy roczne stopy są stałe, $i_k = i$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$, stopy nominalne oznaczamy po prostu przez $i^{(m)}$ oraz $d^{(m)}$.

Wyznaczymy teraz zależność pomiędzy $\ddot{a}^{(m)}(\mathbf{c}; v)$ oraz $\ddot{a}(\mathbf{c}; v)$. Załóżmy na początek, że stopa procentowa w każym roku jest stała i wynosi i. Zauważmy najpierw, że

$$\ddot{a}(1_n) = \frac{1-v^n}{1-v}.$$

Jeżeli $\mathbf{c} = \mathbf{e}^0$ oraz płatności dokonywane sa m–krotnie w ciągu roku, to mamy do czynienia z rentą, która daje m wypłat po $1/m$ każda obliczona przy stopie procentowej i'. Zatem

$$u_k = \ddot{a}^{(m)}(\mathbf{e}^0; v) = \frac{1}{m}\left(\frac{1-(1-d')^m}{d'}\right) = \frac{d}{d^{(m)}},$$

dla każdego k, przy czym przyjmujemy $u_k = 1$ jeśli $d = 0$. Zatem

$$\ddot{a}^{(m)}(\mathbf{c}; v) = \ddot{a}(c * \mathbf{u}; v) = \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}(\mathbf{c}; v).$$

W ogólnym przypadku, gdy stopy procentowe nie są stałe mamy $u_k = d_k/d_k^{(m)}$, oraz

$$\ddot{a}^{(m)}(\mathbf{c}; v) = \ddot{a}(c * \mathbf{u}; v),$$

gdzie $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$.

Zauważmy, że $d_k \leqslant d_k^{(m)}$, a więc jeśli $c_k \geqslant 0$, dla każdego k, to $\ddot{a}^{(m)}(\mathbf{c}) \leqslant \ddot{a}(\mathbf{c})$. Zatem płatności dokonywane m razy w ciągu roku są obecnie mniej warte niż płatności raz w ciągu roku.

3. Renty życiowe m–krotne

Rozważymy teraz renty życiowe, których roczna wypłata c_k jest podzielona na m płatności w ciągu roku. Niech

$$\ddot{a}_x^{(m)}(\mathbf{c}) = \ddot{a}^{(m)}(\mathbf{c}; y_x)$$

oznacza obecną wartość takiej renty dla x–latka.

Musimy teraz wziąć pod uwagę, że jeśli śmierć ubezpieczonego nastąpi w trakcie roku, to otrzyma on tylko płatności przed chwilą śmierci. Powinniśmy zatem znać prawdopodobieństwa śmierci lub przeżycia ułamkowej części roku. Ale z tablic trwania życia możemy odczytać takie prawdopodobieństwa tylko dla całych lat, a więc musimy przyjąć jakieś założenie pozwalające obliczać prawdopodobieństwa dla ułamkowych części roku. Najczęściej stosowanym założeniem jest *hipoteza jednostajności*. Stwierdza ona, że dla ustalonego $x = 0, 1, 2, \ldots$, wartości ℓ_t dla $t \in [x, x+1]$ maleją liniowo od ℓ_x do ℓ_{x+1}. Zatem dla $0 < t < 1$

$$\ell_t = (1-t)\ell_x + t\ell_{x+1}.$$

Inaczej

$$\ell_{x+t} - \ell_{x+t+h} = h(\ell_x - \ell_{x+1}) = hd_x,$$

a więc liczba x-latków zmarłych w przedziale czasu o długości h jest równa h razy liczba zmarłych w ciągu całego roku. Zatem śmiertelność jest rozłożona jednostajnie w ciągu całego roku.

Przykład 1. Załóżmy, że $\ell_{60} = 1000$ oraz $\ell_{61} = 940$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba w wieku 60 lat i 4 miesiące umrze przed osiągnięciem wieku 60 i pół roku?

Liczba zmarłych w ciągu całego roku wynosi $d_{60} = 1000 - 940 = 60$. Liczba zmarłych w piątym i szóstym miesiącu wynosi $1/6 \cdot d_{60} = 10$. Z 1000 60–latków w ciągu czterech pierwszych miesięcy umrze $\frac{1}{3} \cdot d_{60} = 20$ osób, a więc do wieku 60 lat i 4 miesiące dożyje 980 osób. Zatem

$${}_{\frac{1}{6}}p_{60\frac{1}{3}} = \frac{10}{980}.$$

Równoważnie hipoteza jednostajności może być sformułowana jako

$${}_tq_x = tq_x, \quad \text{dla } x = 0, 1, 2, \ldots \text{ oraz } 0 < t < 1,$$

gdyż ${}_tq_x = (\ell_x - \ell_{x+t})/\ell_x$.

Wyprowadzimy teraz wzory na $\ddot{a}_x^{(m)}(\mathbf{c})$ w zależności od $\ddot{a}_x(\mathbf{c})$, stosując założenie hipotezy jednostajności. Załóżmy najpierw, że stopa procentowa w każdym roku jest taka sama i wynosi i. Przypomnijmy, że wtedy $y_x \circ k = y_{x+k}$. Określmy funkcje

$$\beta(m) = \beta(m,i) = \frac{1}{vm^2}\left[v^{1/m} + 2v^{2/m} + \ldots + (m-1)v^{(m-1)/m}\right],$$
$$\alpha(m) = \alpha(m,i) = \frac{d}{d^{(m)}} + d\beta(m).$$

Można pokazać, że

$$\beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)}i^{(m)}}, \quad \alpha(m) = \frac{di}{d^{(m)}i^{(m)}}.$$

W praktyce często stosuje się przybliżone wartości uzyskane przez podstawienie $i = 0$ (a więc $v = 1$ i $d = 0$), czyli

$$\beta(m) \approx \beta(m,0) = \frac{1 + 2 + \ldots + (m-1)}{m^2} = \frac{m-1}{2m},$$

oraz

$$\alpha(m) \approx \alpha(m,0) = 1.$$

Mamy teraz

$$\ddot{a}_x^{(m)}(\mathbf{e}^0) = \frac{1}{m}\left[1 + v^{1/m}\,{}_{\frac{1}{m}}p_x + v^{2/m}\,{}_{\frac{2}{m}}p_x + \ldots + v^{(m-1)/m}\,{}_{\frac{m-1}{m}}p_x.\right]$$

Ale

$${}_{\frac{j}{m}}p_x = 1 - \frac{j}{m}q_x$$

a więc

$$\begin{aligned} u_0 = \ddot{a}_x^{(m)}(\mathbf{e}^0) &= \frac{1}{m}\left[1 + v^{1/m} + v^{2/m} + \ldots + v^{(m-1)/m}\right] \\ &\quad - \frac{q_x}{m^2}\left[v^{1/m} + 2v^{2/m} + \ldots + (m-1)v^{(m-1)/m}\right] \\ &= \ddot{a}^{(m)}(\mathbf{e}^0) - \beta(m)vq_x = \frac{d}{d^{(m)}} - \beta(m)vq_x. \end{aligned}$$

Zatem dla dowolnego $k = 1, 2, \ldots$

$$u_k = \ddot{a}^{(m)}(\mathbf{e}^0; y_x \circ k) = \ddot{a}^{(m)}(\mathbf{e}^0; y_{x+k}) = \ddot{a}_{x+k}^{(m)}(\mathbf{e}^0) = \frac{d}{d^{(m)}} - \beta(m)vq_{x+k},$$

co można zapisać jako

$$\mathbf{u} = \frac{d}{d^{(m)}}(1_\infty) - \beta(m)\mathbf{w}_x,$$

gdzie $(\mathbf{w}_x)_k = v(k, k+1)q_{x+k} = vq_{x+k}$.

Dla ogólnego wektora $\mathbf{c}$ świadczeń renty życiowej m–krotnej mamy

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)}(\mathbf{c}) &= \ddot{a}^{(m)}(\mathbf{c}; y_x) = \ddot{a}(\mathbf{c} * \mathbf{u}; y_x)\\ &= \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}(\mathbf{c} * (1_\infty); y_x) - \beta(m)\ddot{a}(\mathbf{c} * \mathbf{w}_x; y_x)\\ &= \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}(\mathbf{c}; y_x) - \beta(m)\ddot{a}_x(\mathbf{c} * \mathbf{w}_x)\\ &= \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x(\mathbf{c}) - \beta(m)A_x(\mathbf{c}).\end{aligned}$$

Zatem renta życiowa płatna m–krotnie kosztuje mniej niż renta z tym samym wektorem świadczeń, która daje wypłaty raz w ciągu każdego roku.

Aby uzyskać wzór na $\ddot{a}_x^{(m)}(\mathbf{c})$, w którym występują tylko wartości obecne rent zastosujemy ogólna tożsamość dla rent i ubezpieczeń

$$A_x(\mathbf{b}) = \ddot{a}_x(\Delta\mathbf{b}) - \ddot{a}_x(\mathbf{d} * \mathbf{b}),$$

gdzie $\Delta\mathbf{b} = (b_0, b_1 - b_0, b_2 - b_1, \dots, b_n - b_{n-1}, -b_n)$ oraz $\mathbf{d} = (d_0, d_1, d_2, \dots)$ oznacza wektor stóp dyskontowych. W naszym przypadku $\mathbf{d} = d(1_\infty)$, a więc

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)}(\mathbf{c}) &= \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x(\mathbf{c}) - \beta(m)\left[\ddot{a}_x(\Delta\mathbf{c}) - d\ddot{a}_x((1_\infty) * \mathbf{c})\right]\\ &= \alpha(m)\ddot{a}_x(\mathbf{c}) - \beta(m)\ddot{a}_x(\Delta\mathbf{c}).\end{aligned}$$

Stosując przybliżone wartości dla $\alpha(m)$ i $\beta(m)$ otrzymujemy wzór przybliżony

$$\ddot{a}_x^{(m)}(\mathbf{c}) = \ddot{a}_x(\mathbf{c}) - \frac{m-1}{2m}\ddot{a}_x(\Delta\mathbf{c}).$$

W ogólnym przypadku, gdy stopy procentowe nie są stałe, możemy określić $\beta_k(m) = \beta(m, i_k)$ oraz $\alpha_k(m) = \alpha(m, i_k)$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$, i otrzymamy wektory $\boldsymbol{\beta}(m)$ i $\boldsymbol{\alpha}(m)$. Wtedy

$$\ddot{a}_x^{(m)}(\mathbf{c}) = \ddot{a}_x(\mathbf{c} * \boldsymbol{\alpha}(m)) - \ddot{a}_x(\Delta(\mathbf{c} * \boldsymbol{\beta}(m)).$$

4. Rezerwy w ciągu roku

Firmy ubezpieczeniowe dokonują obliczeń rezerw na koniec roku finansowego (np. 31 grudnia), ale chwila ta nie musi się pokrywać z końcem roku od zawarcia konkretnej umowy ubezpieczeniowej. Musimy zatem obliczyć rezerwę w chwili $k + s$, gdzie k jest liczbą całkowitą, ale $s \in (0, 1)$.

Rozważmy ogólną polisę z wektorem świadczeń $\mathbf{b}$ oraz wektorem składek $\boldsymbol{\pi}$ płatnych corocznie. Załóżmy najpierw, że świadczenie za śmierć pomiędzy chwilami k i $k+s$ jest wypłacane w chwili $k + s$. Wtedy rezerwa w chwili $k + s$ wynosiłaby

$$({}_kV + \pi_k)y_x(k + s, k) - b_k\frac{{}_sq_{k+k}}{{}_sp_{x+k}}.$$

Zatem bilans w chwili $k+s$ otrzymujemy z bilansu w chwili k poprzez dodanie składki, zakumulowanie do chwili $k + s$ zdyskontowaną funkcją przeżycia, a następnie odjęcie

kwoty wystarczającej na zapłacenie świadczenia na wypadek śmierci dla zmarłych do chwili $k+s$.

Jednakże musimy nieco zmienić ten wzór, aby uwzględnić fakt, że świadczenie jest wypłacone dopiero w chwili $k+1$. Dlatego mnożymy drugi składnik przez $v(k+s,k+1)$. Zauważmy, że

$$\frac{v(k+s,k+1)}{{}_sp_{x+k}} = \frac{y_x(k+s,k+1)}{{}_{1-s}p_{x+k+s}\cdot {}_sp_{x+k}} = \frac{y_x(k+s,k+1)}{p_{x+k}}.$$

Ponadto na mocy hipotezy jednostajności mamy ${}_sq_{x+k} = sq_{x+k}$, a więc

$$\begin{aligned}{}_{k+s}V &= ({}_kV+\pi_k)y_x(k+s,k) - sb_k\frac{q_{x+k}}{p_{x+k}}y_x(k+s,k+1)\\ &= (1-s)({}_kV+\pi_k)y_x(k+s,k) + s\left[({}_kV+\pi_k)y_x(k+1,k) - b_k\frac{q_{x+k}}{p_{x+k}}\right]y_x(k+s,k+1).\end{aligned}$$

Ale

$${}_{k+1}V = ({}_kV+\pi_k)y_x(k+1,k) - b_k\frac{q_{x+k}}{p_{x+k}},$$

a więc

$${}_{k+s}V = (1-s)({}_kV+\pi_k)y_x(k+s,k) + s\left[{}_{k+1}V\, y_x(k+s,k+1)\right].$$

Innymi słowy rezerwa w chwili $k+s$ jest liniową kombinacją rezerw w chwili k oraz $k+1$.

Często stosuje się uproszczoną postać tego wzoru zakładając, że prawdopodobieństwa q_x oraz stopy procentowe są dostatecznie małe, i można przyjąć $y_x \equiv 1$. Stąd

$${}_{k+s}V = (1-s)({}_kV+\pi_k) + s_{k+1}V = (1-s)_kV + s_{k+1}V + (1-s)\pi_k.$$

Ostatni składnik nazywany jest składką niezasłużoną.