REZERWY UBEZPIECZEŃ I RENT ŻYCIOWYCH

M. BIENIEK

Przypomnijmy, że dla dowolnego wektora przepływów $\mathbf{c}$ rezerwę w chwili k względem funkcji dyskonta v zdefiniowaliśmy jako

$$ {}_k(\mathbf{c}; v) = -\operatorname{Val}_k({}^k\mathbf{c}; v), \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{A}$$

W przypadku kontratu w ubezpieczeniach na życie, rezerwa w chwili k jest to kwota jakiej potrzebuje ubezpieczyciel aby pokryć wszystkie przyszłe zobowiązania z tytułu danej umowy. Wyznaczanie wielkości rezerwy (zwane *wyceną wartości* umowy) jest ważną powinnością ubezpieczyciela, który chce być pewny, że przyszłe składki wraz z odsetkami wystarczą na pokrycie obiecanych przyszłych świadczeń.

1. Podstawowe definicje

Będziemy rozważać następujący model ogólny. Zakładamy, że dana jest funkcja dyskonta v oraz ustalona tablica trwania życia. Rozważamy umowę dla x–latka z wektorem świadczeń na wypadek śmierci $\mathbf{b}$, wektorem świadczeń renty życiowej $\mathbf{c}$ oraz wektorem składek $\boldsymbol{\pi}$. Dla uproszczenia pomijamy możliwość świadczeń gwarantowanych. Przypomnijmy, że świadczenia na wypadek śmierci można traktować jako rentę życiową z wektorem świadczeń $\mathbf{b} * \mathbf{w}_x$, gdzie $(\mathbf{w}_x)_k = v(k, k+1)q_{x+k}$. Tworzymy wtedy wektor łącznego przepływu

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\pi} - \mathbf{b} * \mathbf{w}_x - \mathbf{c},$$

który opisuje łączne przepływy związane z daną umową z punktu widzenia ubezpieczyciela. *Rezerwa* w chwili k związana z powyższą umową jest to po prostu rezerwa wektora $\mathbf{f}$ względem zdyskontowanej funkcji przeżycia y_x, czyli

$$ {}_kV = {}_kV(\mathbf{f}; y_x) = -\operatorname{Val}_k({}^k\mathbf{f}; y_x).$$

Często użyteczny jest wzór, w którym świadczenia i składki są rozdzielone w postaci

$$ {}_kV = \frac{1}{y_x(k)} \left[A_x({}^k\mathbf{b}) + \ddot{a}_x({}^k\mathbf{c}) - \ddot{a}_x({}^k\boldsymbol{\pi}) \right],$$

lub równoważnie

$$ {}_kV = A_{\{x\}+k}(\mathbf{b} \circ k) + \ddot{a}_{\{x\}+k}(\mathbf{c} \circ k) - \ddot{a}_{\{x\}+k}(\mathbf{c} \circ k).$$

Wzory te stwierdzają, że rezerwa w chwili k jest wartością w chwili k przyszłych świadczeń pomniejszoną o wartość przyszłych składek w tej samej chwili. Jest to tzw. *prospektywne* podejście do obliczania rezerw.

Możliwe jest również podejście *retrospektywne* przy użyciu pojęcia bilansu w chwili k. Zakładamy zawsze, że składki i świadczenia z tytułu danej umowy są równoważne aktuarialnie, a więc

$$ {}_kV(\mathbf{f}; y_x) = B_k(\mathbf{f}; y_x) = \frac{1}{y_x(k)}[\ddot{a}_x({}_k\boldsymbol{\pi}) - \ddot{a}_x({}_k\mathbf{c}) - A_x({}_k\mathbf{b})]. $$

Wzór ten stwierdza, że rezerwa w chwili k jest wartością w chwili k dotychczas zebranych składek pomniejszoną o wartość w tej samej chwili wypłaconych dotychczas świdczeń.

Przykład 1. Rozważmy następujący kontrakt. Dwuletni kontrakt dla 60–latka przewiduje świadczenia: 80 za śmierć w pierwszym roku, 75 za śmierć w drugim roku, oraz 70 w razie dożycia do wieku 62. Zakładamy, że $q_{60} = 0.2$, $q_{61} = 0.4$ oraz $i = 100\%$. Ponadto umowa będzie opłacona dwoma składkiami w jednakowej wysokości w chwilach 0 i 1. Wyznaczymy wysokości rezerwy w chwilach 1 i 2.

Mamy $v(1) = \frac{1}{2} = v(1,2)$ oraz $v(2) = \frac{1}{4}$. Jednorazowa składka za świadczenie na wypadek śmierci wynosi

$$ A_{60}(80, 75) = 80v(1)q_{60} + 75v(2)p_{60}q_{61} = 14. $$

Ponadto, ${}_2p_{60} = p_{60}p_{61} = 0.48$, a więc składka za ubezpieczenie na dożycie wynosi

$$ \ddot{a}_{60}(0, 0, 70) = 70v(2){}_2p_{60} = 8.4. $$

Obecna wartość wektora składek wynosi

$$ \pi_0\ddot{a}_x(1, 1) = \pi_0(1 + v(1)p_{60}) = 1.41\pi_0. $$

Porównując wartości obecne świadczeń i składek otrzymujemy

$$ \pi_0 = \pi_1 = \frac{14 + 8.4}{1.4} = 16. $$

Zatem

wartość w chwili 1 przyszłych świadczeń za śmierć $= 75v(1,2)q_{61} = 15$,

wartość w chwili 1 przyszłych świadczeń renty $= 70v(1,2)p_{61} = 21$,

wartość w chwili 1 przyszłych składek $= 16$,

a więc

$$ {}_1V = 15 + 21 - 15 = 20. $$

Ponadto w chwili 2 jedyną pozostałą wypłatą lub wpłatą jest wypłata renty w wysokości 70, a więc ${}_2V = 70$. Powyższe podejście należy stosować jedynie w rachunkach ręczych. W obliczeniach dla dłuższych okresów czasu przy uzyciu arkusza kalulacyjnego wygodniejsze jest podejście, w którym najpierw obliczamy wektor $\mathbf{f}$ łącznych przepływów.

Mamy $\mathbf{w}_{60} = (0.1, 0.2, -)$ (nie możemy wyznaczyć ostatniej współrzędnej, ale jej wartość jest bez znaczenia bo będzie pomnożona przez 0). Zatem $\mathbf{b} * \mathbf{w}_{60} = (8, 15, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 70)$ oraz $\boldsymbol{\pi} = (16, 16, 0)$, a więc $\mathbf{f} = (8, 1, -70)$. Stąd cała umowa może być rozważana jako kontrakt, w którym ubezpieczony wpłaca 8 w chwili 0, 1 w chwili 1 oraz odbiera 70 w chwili 2, pod warunkiem dożycia. Dalej zauważamy, że $y_{60}(1) = v(1)p_{60} = 0.4$, $y_{60}(2) = v(2)_2p_{60} = 0.12$ oraz $y_{61}(1) = v(1,2)p_{61} = 0.3$. Korzystając z definicji rezerwy otrzymamy

$$ {}_1V = -(f_1 + f_2 y_{61}(1)) = 20, $$

oraz ${}_2V = -f_2 = 70$, jak poprzednio. Możemy sprawdzić powyższe wyniki obliczając bilanse przepływu $\mathbf{f}$. Mamy

$$ \begin{aligned} B_1(\mathbf{f}) &= f_0 y_{60}(1, 0) = 20, \\ B_2(\mathbf{f}) &= f_0 y_{60}(2, 0) + f_1 y_{60}(2, 1) = 70. \end{aligned} $$

2. Ogólne zachowanie rezerw

Rozważymy teraz problem, czy rezerwy w ubezpieczeniach na życie są na ogół dodatnie czy ujemne. Dodatnia wartość rezerwy w danej chwili oznacza, że ubezpieczyciel zebrał do tej pory w postaci składek więcej niż wypłacił, a więc jest to sytuacja korzystna z punktu widzenia ubezpieczyciela. Ujemna wartość rezerwy oznacza, że ubezpieczony ma u ubezpieczyciela swego rodzaju dług, który spłaci w postaci przyszłych składek. Jest to sytuacja niepożądana przez ubezpieczyciela, gdyż ubezpieczony może w pewnym momencie zaprzestać płacenia składek.

Przykład 2. Polisa na życie zapewnia świadczenie w wysokości 1 na koniec roku śmierci. Opłacana jest ona dożywotnio corocznymi składkami w stałej wysokości. Stopa procentowa jest taka sama w każdym roku oraz $q_x = q$ dla każdego x. Wyznaczymy wysokość rezerwy w dowolnej chwili.

Zauważmy najpierw, że $p_x = p = 1 - q$ również nie zależy od q, a więc ${}_kp_x = p^k$. Zatem prawdopodobieństwo dożycia dowolnego wieku jest dodatnie, a więc $\omega = \infty$. Niech $v = v(k, k+1)$ oznacza stały czynnik dyskonta. Wtedy $\mathbf{w}_x * \mathbf{b}$ jest wektorem stałym o wyrazach vq, oraz wektor wzorca składki jest stały $\boldsymbol{\rho} = (1_\infty)$. Zatem wysokość każdej składki wynosi $\pi_k = vq$, gdyż tylko w takim przypadku wektory $\mathbf{w}_x * \mathbf{b}$ i $\boldsymbol{\pi}$ będą równoważne aktuarialnie (w rzeczywistości będą one równe). W takim razie wektor łącznych przepływów $\mathbf{f} = \boldsymbol{\pi} - \mathbf{b} * \mathbf{w}_x$ jest wektorem zerowym, a więc rezerwa w każdej chwili jest równa 0.

Powyższa sytuacja jest typowa, ale raczej w ubezpieczeniach majątkowych. W ubezpieczeniach na życie wartości q_x nie są stałe, ale rosną wraz ze wzrostem x. Dlatego w typowych ubezpieczeniach ze stałą składką, na początku składki są w pewnym sensie

wyższe niż powinny być, a w dalszych latach trwania polisy niższe. Zatem pod koniec trwania polisy przyszłe składki nie wystarczyłyby do pokrycia przyszłych zobowiązań ubezpieczyciela i deficyt ten jest pokrywany ze składek zebranych w przeszłości. Stąd w typowych ubezpieczeniach na życie rezerwy są zazwyczaj dodatnie.

Ujemne rezerwy mogą pojawić się na przykład w przypadku polis, które zapewniają duże świadczenia na początku, a potem coraz mniejsze, przy czym spadek wysokości świadczenia jest bardzo szybki. Mogą się one również pojawić, gdy składki okresowe nie są stałe w czasie, ale rosną w szybkim tempie.

3. Wzory rekurencyjne na rezerwy

Dla wygody, w ogólnym modelu omawianym wyżej, połączymy wektor składek $\boldsymbol{\pi}$ i wektor świadczeń z tytułu renty życiowej $\mathbf{c}$, i będziemy pisać $\boldsymbol{\pi}$ zamiast $\boldsymbol{\pi} - \mathbf{c}$. Zatem wektor przepływów $\mathbf{f}$ ma następujące wyrazy

$$f_k = \pi_k - b_k v(k, k+1) q_{x+k}.$$

Przypomnijmy, że dla dowolnego wektora przepływów $\mathbf{c}$ wyprowadziliśmy wzór rekurencyjny na rezerwy tego przepływu w postaci

$${}_{k+1}V(\mathbf{c}; v) = ({}_kV(\mathbf{c}; v) + c_k)\, v(k+1, k),$$

z wartością początkową ${}_0V(\mathbf{c}) = -\ddot{a}(\mathbf{c})$. Zatem dla ogólnego kontraktu ubezpieczenia na życie

$${}_{k+1}V = [{}_kV + \pi_k - b_k v(k, k+1) q_{x+k}]\, y_x(k+1, k)$$

z wartością początkową ${}_0V = -\ddot{a}_x(\mathbf{f}) = 0$, gdyż $\mathbf{f}$ jest wektorem o wartości 0. Korzystając z faktu, że

$$y_x(k+1, k) = \frac{1 + i_k}{p_{x+k}},$$

powyższą równość można zapisać w postaci

$${}_{k+1}V = ({}_kV + \pi_k)\frac{1 + i_k}{p_{x+k}} - b_k \frac{q_{x+k}}{p_x + k}.$$

Zauważmy, że $\frac{q_{x+k}}{p_x+k} = \frac{d_{x+k}}{\ell_{x+k+1}}$, a więc jest to wielkość jaką każdy z przeżywających ubezpieczonych płaci w chwili $k+1$ na pokrycie świadczeń dla tych, którzy umarli w ciągu ostatniego roku.

Wzór powyższy ma charakter retrospektywny, i mówi, że rezerwa w chwili $k+1$ jest uzyskana z rezerwy w chwili k przez dodanie składki π_k, zakumulowanie względem zdyskontowanej funkcji przeżycia, a następnie odjęcie wypłat świadczeń w chwili $k+1$.

Uwaga. Wielkość ${}_kV + \pi_k$ jest nazywana rezerwą początkową w chwili k, gdyż jest to wielkość rezerwy w chwili k po zebraniu płatności składek. Wartość samej rezerwy ${}_kV$ jest czasami nazywana rezerwą końcową, dla podkreślenia faktu, że jest ona wyznaczana tuż przed chwilą k, a więc przed płatnością składki.

Jeszcze inną postać wzoru rekurencyjnego otrzymamy mnożąc obydwie strony ostatniej równości przez $p_{x+k} = 1 - q_{x+k}$ i przestawiając odpowiednio wyrazy. Mamy wtedy

$$ {}_{k+1}V = ({}_kV + \pi_k)(1 + i_k) - q_{x+k}(b_k - {}_{k+1}V). $$

Definicja 1. Wielkość $b_k - {}_{k+1}V$ nazywana jest *wartością ryzykowną* w chwili $k+1$ i będzie oznaczana przez η_k.

Wzór powyższy mówi, że wartość rezerwy w chwili $k+1$ jest to zakumulowana wartość rezerwy początkowej pomniejszona o wartość ryzykowną, która będzie wypłacona tylko w razie śmierci ubezpieczonego w ostatnim roku. Inaczej mówiąc świadczenie b_k, które należy wtedy wypłacić składa się ze rezerwy początkowej (którą ubezpieczyciel już posiada w chwili k), zakumulowanej przez 1 rok, a więc do pełnej kwoty świadczenia brakuje jeszcze $b_k - {}_{k+1}V$.

4. Rozkład składki na część ryzykowną i oszczędnościową

Mnożąc ostanią równość przez $v(k, k+1)$ i przestawiając wyrazy otrzymamy wzór

$$ \pi_k = v(k, k+1)q_{x+k}\eta_k + \left[v(k, k+1)_{k+1}V - {}_kV\right]. $$

Wzór ten wyraża składkę płaconą w chwili k w postaci dwóch składników. Pierwszy składnik jest nazywany *ryzykowną częścią składki*, gdyż jest to kwota jaką należy zapłacić w chwili k za ubezpieczenie na 1 rok na sumę równą wartości ryzykownej η_k. Drugi składnik jest róznicą pomiędzy wartością w chwili k przyszłej rezery i obecnej rezerwy, i nazywany jest *oszczędnościową częścią składki.*

Przykład 3. Wyznaczymy rozkład powyższego typu dla składek z Przykładu 1.

Przypomnijmy, że $i = 100\%$ oraz $b_0 = 80$, $b_1 = 75$, $c_2 = -70$. Ponadto $\pi_0 = \pi_1 = 0$ oraz ${}_0V = 0$, ${}_1V = 20$, ${}_2V = 70$. W pierwszym roku wartość ryzykowna wynosi $\eta_0 = b_0 - {}_1V = 80 - 20 = 60$. Część ryzykowna składki $\pi_0 = 16$ wynosi więc $v(0,1)q_{60}\eta_0 = \frac{1}{2} \cdot 0.2 \cdot 60 = 6$. Część oszczędnościowa wynosi $v(0,1){}_1V - {}_0V = 10$.

W drugim roku wartośc ryzykowna η_1 wynosi $b_1 - {}_2V = 5$, a więc część ryzykowna składki π_1 wynosi $\frac{1}{2} \cdot 0.4 \cdot 5 = 1$, a część oszczędnościowa to $\frac{1}{2} \cdot 70 - 20 = 16$.

Powyższy rozkład pokazuje, że dowolną polisę można rozważać jako sumę dwóch oddzielnych kontraktów: czysto ubezpieczeniowego i czysto oszczędnościowego.

Dla części czysto ubezpieczeniowej składka roczna to część ryzykowna składki w ogólnym kontrakcie, a świadczenie na wypadek śmierci w k–tym roku wypłacane jest w wysokości wartości ryzykownej η_k. Taka polisa ma zerowe rezerwy w każdej chwili, gdyż składka ryzykowna wystarcza tylko i wyłącznie na pokrycie wypłaty wartości ryzykownej w razie śmierci w ciągu roku. W powyższym przykładzie ubezpieczony płaci 6

w chwili 0 co wystarcza na pokrycie ewentualnej wypłaty 60 w razie śmierci. Potem płaci 1 w chwili 1, co zapewnia ewentualną wypłatę 5 w chwili 2.

Część oszczędnościowa polisy działa jak konto w banku, a więc środki zgromadzone są akumulowane względem funkcji dyskonta v. W powyższym przykładzie, oszczędnościowa część składki π_0 w kwocie 10 zakumuluje do 40 w chwili 2, a ta sama część składki π_1, czyli 15, zakumuluje do 30 w chwili 2. Łączne oszczędności wynoszą więc 70 i taka dokładnie kwota jest potrzebna jako wypłata w chwili 2.