UBEZPIECZENIA NA ŻYCIE

M. BIENIEK

Ubezpieczenie na życie jest to kontrakt pomiędzy ubezpieczycielem a ubezpieczonym gwarantujący, że ubezpieczyciel w zamian za opłacanie składek, wypłaci z góry ustaloną kwotę świadczenia po śmierci ubezpieczonego. Wysokość świadczenia może się zmieniać wraz z upływem czasu. W praktyce, świadczenie wypłacane jest w dość krótkim okresie po śmierci ubezpieczonego, ale dla wygody rozważań będziemy zakładać, że świadczenie będzie wypłacone na koniec roku śmierci. Chodzi tu o pełne lata liczone od chwili zakupu polisy, a nie o lata kalendarzowe. Zauważmy, że w odróżnieniu od rent życiowych, ubezpieczenie na życie zapewnia zwykle tylko pojedynczą wypłatę, a nie ciąg wypłat.

1. Wyznaczenie składek w ubezpieczeniu na życie

Rozważmy polisę na życie dla x–latka. Niech b_k będzie kwotą, która zostanie wypłacona w chwili $k+1$, jeżeli śmierć nastąpi pomiędzy chwilami k i $k+1$. Wektor

$$\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{\omega-x-1})$$

będziemy nazywać *wektorem świadczeń*. Zauważmy, że kwota b_k jest płatna w chwili $k+1$, a nie k.

Załóżmy, że dana jest funkcja dyskonta v oraz oraz pewna tablica trwania życia. Chcemy wyznaczyć wysokość jednorazowej składki za powyższą polisę, składkę tą oznaczymy przez $A_x(\mathbf{b})$. Jej wysokość wyznaczymy przy założeniu, że wszystkie wpłacone składki wraz z odsetkami pokryją przyszłe świadczenia na wypadek śmierci.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $\mathbf{b} = \mathbf{e}^k$ dla ustalonego $k = 0, 1, 2, \ldots$. W takim przypadku ubezpieczyciel wypłaci 1 PLN w chwili $k+1$, jeśli ubezpieczony umrze w wieku pomiędzy $x+k$ i $x+k+1$. W przeciwnym razie świadczenie wynosi 0. Przypuśćmy, że mamy grupę ℓ_x osób w wieku x, z których każda kupuje kontrakt powyższego rodzaju. Z tej grupy d_{x+k} osób umrze w wieku pomiędzy $x+k$ i $x+k+1$, i każda z tych osób otrzyma 1 PLN w chwili $k+1$. Łączna wartość obecna tych świadczeń to $v(k+1)d_{x+k}$. Musi być ona równa łącznej wysokości zebranych składek, czyli $\ell_x\, A_x(\mathbf{e}^k)$. Zatem

$$A_x(\mathbf{e}^k) = v(k+1)\frac{d_{x+k}}{\ell_x} = v(k+1)\,{}_{k|}q_x = v(k+1)_k p_x\, q_{x+k}.$$

Ogólną polisę z wektorem świadczeń $\mathbf{b}$ można rozważać jako ciąg polis powyższego typu, jedną dla każdej wartości k, przy czym k–ta polisa daje wypłatę b_k w chwili $k+1$ w przypadku śmierci w ciągu ostatniego roku. Składka za taką polisę wynosi

$b_k v(k+1)_k p_x\, q_{x+k}$, a składka za całą polisę jest po prostu sumą składek za poszczególne polisy. Zatem

$$A_x(\mathbf{b}) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} b_k v(k+1)_k p_x\, q_{x+k}.$$

Zauważmy, że powyższe wyrażenie jest podobnej postaci jak dla składki renty życiowej, tzn. sumujemy pewną liczbę składników, z których każdy jest iloczynem trzech czynników postaci:

$$\text{kwota wypłaty} \;\times\; \text{czynnik dyskonta} \;\times\; \text{prawdopodobieństwo wypłaty.}$$

Tajk jak w przypadku rent życiowych w oznaczeniach będziemy opuszczać wektor świadczeń $(1_\infty) = (1_{\omega-x})$. Zatem A_x oznacza wysokość jednorazowej składki za polisę dla x–latka, gwrantującą wypłatę 1 PLN na koniec roku śmierci.

Przykład 1. Załóżmy, że $q_{60} = 0.2$, $q_{61} = 0.4$, $q_{62} = 0.5$ oraz $i = 100\%$. Polisa dla 60–latka zapewnia wypłaty na koniec roku śmierci w wysokości 80 za śmierć w ciągu pierwszego roku, 75 za śmierć w drugim roku lub 100 za śmierć w trzecim roku. Jeżeli ubezpieczony przeżyje 3 lata, to nie otrzymuje żadnych świadczeń. Obliczymy jednorazową składkę takiej polisy.

Niech $\mathbf{b} = (80, 75, 100)$. Mamy $v(k) = 2^{-k}$ oraz ${}_2p_{60} = p_{60}p_{61} = 0.48$. Zatem na mocy powyższego wzoru

$$\begin{aligned} A_x(\mathbf{b}) &= b_0 v(1) q_{60} + b_1 v(2) p_{60} q_{61} + b_2 v(3)_2 p_{60} q_{62} \\ &= 100 \cdot 2^{-1} \cdot 0.2 + 75 \cdot 2^{-2} \cdot 0.8 \cdot 0.4 + 100 \cdot 2^{-3} \cdot 0.48 \cdot 0.5 = 17. \end{aligned}$$

Najczęściej, ubezpieczony opłaca ubezpieczenie na życie ciągiem okresowych składek, a nie składką jednorazową. Zakładamy, że płatności składek dokonywane są corocznie i dane jako wektor składek $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{\omega-x-1})$, lub pośrednio przez wysokość składki początkowej π_0 oraz wektor wzorca składki $\boldsymbol{\rho} = (1, \rho_1, \ldots, \rho_{\omega-x-1})$, podobnie jak w przypadku rent życiowych. Stosując ponownie zasadę równoważności składek i świadczeń względem y_x otrzymamy

$$A_x(\mathbf{b}) = \ddot{a}_x(\boldsymbol{\pi}) = \pi_0 \ddot{a}_x(\boldsymbol{\rho}),$$

a więc

$$\pi_0 = \frac{A_x(\mathbf{b})}{\ddot{a}_x(\boldsymbol{\rho})}.$$

2. Przykłady polis na życie

Najprostsze przykłady polis na życie to polisy terminowe i bezterminowe. Polisa terminowa na n lat to taka, w której $b_k = 0$ dla $k \geqslant n$, a więc po upływie n lat ważność polisy wygasa nawet jeśli ubezpieczony żyje. W naszy modelu nie ma więc potrzeby rozróżniania między tymi polisami.

Inny przykład to polisa na życie i dożycie na n lat, która zapewnia x–latkowi świadczenie na wypadek śmierci, jeśli nastąpi ona w ciągu n lat oraz świadczenie w chwili n w razie dożycia do wieku $x+n$. Aby wyznaczyć wysokość składki w takim ubezpieczeniu rozważamy je jako dwie osobne umowy i sumujemy ich składki.

Przykład 2. Polisa ubezpieczeniowa dla x–latka zapewnia świadczenie 1 w chwili n, jeżeli ubezpieczony jeszcze żyje, oraz wypłatę 1 na koniec roku śmierci, jeżeli x–latek umrze przed upływem n lat. Polisa ta jest opłacana coroczną składką w wysokości P. Wyznaczymy wielkość P.

Jednorazowa składka za ubezpieczenie na wypadek śmierci wynosi $A_x(1_n)$, a za ubezpieczenie na dożycie — $y_x(n)$. Wektor wzorca składki to $\boldsymbol{\rho} = (1_n)$. Zatem jednorazowa składka za całe ubezpieczenie wynosi $A_x(1_n) + y_x(n)$, a więc

$$P = \frac{A_x(1_n) + y_x(n)}{\ddot{a}_{x(1_n)}}.$$

Przykład 3. Rozważmy 20–letnie ubezpieczenie zapewniające świadczenie 1 jeśli śmierć nastąpi w ciągu 10 lat, lub 2, jeśli śmierć nastąpi w ciągu kolejnych 10 lat. Dodatkowo w razie przeżycia 20 lat ubezpieczony otrzyma 3 w chwili 20. Składki będą opłacane przez 15 lat w stałej wysokości rocznej P. Rozumując podobnie jak w poprzednim przykładzie dostajemy wzór na P w postaci

$$P = \frac{A_x(1_{10}, 2_{10}) + 3y_x(20)}{\ddot{a}_x(1_{15})}.$$

Możliwe jest również połączenie ubezpieczenia terminowego z odroczoną rentą życiową.

Przykład 4. Umowa dla 40–latka przewiduje coroczne wypłaty w wysokości 1 począwszy od wieku 65 lat. Jeżeli ubezpieczony umrze przed osiągnięciem tego wieku, to ubezpieczyciel wypłaci kwotę 10 na koniec roku śmierci. Umowa ta będzie opłacana przez 25 lat coroczną składką w wysokości P. Wtedy, podobnie jak w poprzednich przykładach

$$P = \frac{10A_{40}(1_{25}) + \ddot{a}_{40}(0_{25}, 1_\infty)}{\ddot{a}_{40}(1_{25})}.$$

Drugi składnik w liczniku można zapisać w postaci $v(25)_{25}p_{40}\ddot{a}_{\{40\}+25}$.

Ostatni przykład to renta odroczona połączona z ubezpieczeniem nażycie, zapewniającym zwrot dotychczas wpłaconych składek.

Przykład 5. Umowa dla 40–latka przewiduje coroczne wypłaty w wysokości 1 począwszy od wieku 65 lat. Jeżeli ubezpieczony umrze przed osiągnięciem tego wieku, to ubezpieczyciel wypłaci wszystkie dotychczas wpłacone składki, ale bez odsetek. Składki opłacane są w stałej wysokości P rocznie przez 25 lat. Ile powinno wynosić P?

Załóżmy, że ubezpieczony umrze pomiędzy chwilami k i $k+1$. gdzie $k = 0, 1, \ldots, 24$. Wpłacił on zatem $k+1$ składek w wysokości P, a więc świadczenie w chwili $k+1$ wynosi $b_k = (k+1)P$. Zatem wektorem świadczeń jest

$$\mathbf{b} = (P, 2P, \ldots, 25P) = P\mathbf{j},$$

gdzie $\mathbf{j} = (1, 2, \ldots, 25)$. Przyrównując wartości obecne składek i świadczeń otrzymamy

$$P\ddot{a}_{40}(1_{25}) = PA_{40}(\mathbf{j}) + \ddot{a}_{40}(0_{25}, 1_\infty),$$

a więc

$$P = \frac{\ddot{a}_{40}(0_{25}, 1_\infty)}{\ddot{a}_{40}(1_{25}) - A_{40}(\mathbf{j})}.$$

3. Ogólny wzór na wyznaczanie składek okresowych

Podsumujmy teraz sposób wyznaczania składek okresowych w ubezpieczeniach na życie i rentach życiowych, i ich kombinacjach. Najpierw identyfikujemy cztery wektory:

- wektor świadczeń na wypadek śmierci $\mathbf{b}$,
- wektor świadczeń renty życiowej $\mathbf{c}$,
- wektor płatności gwarantowanych $\mathbf{u} = (0_g, \mathbf{w})$, o ile x–latek dożyje do wieku $x+g$,
- wektor wzorca składki $\boldsymbol{\rho}$.

Oczywiście, w wielu przypadkach spośród wektorów $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ i $\mathbf{w}$, jeden lub dwa będą zerowe. Wtedy obliczamy początkową składkę π_0 z równości wartości obecnych

$$\pi_0\ddot{a}_x(\boldsymbol{\rho}) = A_x(\mathbf{b}) + \ddot{a}_x(\mathbf{c}) + v(g)_g p_x \ddot{a}(\mathbf{w}; v).$$

Równość ta obejmuje również przypadki, gdy wektory po prawej stonie zależą od π_0.

4. Ubezpieczenia na życie jako renty życiowe

Dla dowolnego wektora $\mathbf{c}$ mamy

$$\ddot{a}_x(\mathbf{c}) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} c_k v(k)\, {}_kp_x,$$

a więc

$$A_x(\mathbf{b}) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} b_k v(k+1)_k p_x\, q_{x+k} = \ddot{a}_x(\mathbf{c}), \tag{A}$$

gdzie

$$c_k = v(k, k+1) b_k\, q_{x+k}.$$

Niech $\mathbf{w}_x$ oznacza wektor o k tej współrzędnej $(w_x)_k = v(k, k+1)q_{x+k}$. Będziemy stosować symbol $*$ na oznaczenie mnożenia wektorów po współrzędnych. Zatem,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) * (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n).$$

Wtedy ostatnią równość możemy zapisać w postaci

$$A_x(\mathbf{b}) = \ddot{a}_x(\mathbf{w}_x * \mathbf{b}).$$

Równość tę można zinterpretować następująco. Załóżmy, że ubezpieczyciel sprzedaje ubezpieczenia na życie tylko na 1 rok, oraz dowolne renty życiowe. x–latek, który chce mieć ubezpieczenie na całe życie z wektorem świadczeń $\mathbf{b}$ może postąpić w następujący sposób. Za jednorazową składkę wykupuje rentę życiową z wektorem płatności $\mathbf{w}_x * \mathbf{b}$. Jeżeli ubezpieczony dożyje do chwili k, to z tytułu renty dostanie kwotę $v(k, k{+}1)b_k\, q_{x+k}$, którą natychmiast przeznacza w całości na zakup ubezpieczenia na życie na najbliższy rok. Jeżeli umrze w ciągu roku, to w chwili $k{+}1$ ubezpieczyciel z tytułu ubezpieczenia na życie wypłaci kwotę b_k. Jeżeli przeżyje do chwili $k+1$, to z tytułu renty otrzyma kwotę $v(k+1, k+2)b_{k+1}\, q_{x+k+1}$, za którą wykupuje ubezpieczenie na życie na kolejny rok, i tak dalej. Jest to równoważne ubezpieczeniu na całe życie z wektorem świadczeń $\mathbf{b}$.

Równość $A_x(\mathbf{b}) = \ddot{a}_x(\mathbf{w}_x * \mathbf{b})$ pozwala zaadaptować wyniki uzyskane dla wartości obecnych rent życiowych na przypadek składek jednorazowych w ubezpieczeniach na życie. Na przykład tożsamość podziału dla rent życiowych

$$\ddot{a}_x(\mathbf{c}) = \ddot{a}_x({}_k\mathbf{c}) + y_x(k)\ddot{a}_{\{x\}+k}(\mathbf{c} \circ k).$$

dla ubezpieczeń przybiera postać

$$A_x(\mathbf{b}) = A_x({}_k\mathbf{b}) + y_x(k)A_{\{x\}+k}(\mathbf{b} \circ k),$$

gdzie notacja $\{x\}$ oznacza, że ostatnia składka obliczona jest względem funkcji dyskonta $v \circ k$. Inaczej, $A_{\{x\}+k}(\mathbf{b} \circ k)$ jest składką jaką x–latek zapłaci za k lat za ubezpieczenie na życie z wektorem świadczeń $\mathbf{b} \circ k$.

5. Ogólna tożsamość dla ubezpieczeń i rent

Dla danego wektora $\mathbf{b} = b_0, b_1, \ldots, b_n$ oznaczmy

$$\Delta\mathbf{b} = (b_0, b_1 - b_0, b_2 - b_1, \ldots, b_n - b_{n-1}, -b_n).$$

Zatem $\Delta\mathbf{b}$ otrzymujemy z $\mathbf{b}$ odejmując od każdej współrzędnej porzednią współrzędną, z wyjątkiem zerowej współrzędnej, która pozostaje taka sama (możemy również przyjąć $b_{-1} = 0$). Przypomnijmy konwencję, że $b_j = 0$ dla $j > n$, co tłumaczy ostatni wyraz $-b_n$ w wektorze $\Delta\mathbf{b}$. Niech $\mathbf{d} = (d_0, d_1, d_2, \ldots)$ oznacza wektor stóp dyskontowych, czyli $d_k = 1 - v(k, k+1)$.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnego wektora świadczeń na wypadek śmierci* $\mathbf{b}$ *zachodzi równość*

$$A_x(\mathbf{b}) = \ddot{a}_x(\Delta\mathbf{b}) - \ddot{a}_x(\mathbf{d} * \mathbf{b}).$$

Dowód. Bez zmniejszania ogólności rozważań przyjmijmy, że $\mathbf{b} = (b_0, b_1.b_2, \dots)$ jest wektorem nieskończonym.

Mamy ${}_kp_x\, q_{x+k} = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x$, a więc

$$\begin{aligned} A_x(\mathbf{b}) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k v(k+1)_k p_x\, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k v(k+1)({}_kp_x - {}_{k+1}p_x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k v(k+1)_k p_x - \sum_{k=0}^{\infty} b_{k-1} v(k)_k p_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[v(k+1) - v(k)\right]{}_kp_x + \sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k-1}) v(k)_k p_x. \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że druga suma to po prostu $\ddot{a}_x(\Delta\mathbf{b})$. Ponadto $v(k+1) = v(k)v(k,k+1)$, a więc

$$v(k+1) - v(k) = [v(k,k+1) - 1]v(k) = -d_k v(k),$$

oraz druga suma wynosi

$$-\sum_{k=0}^{\infty} b_k d_k v(k)_k p_x = -\ddot{a}_x(\mathbf{b} * \mathbf{d}),$$

skąd wynika dowodzona tożsamość. □

Zastosujemy powyższe twierdzenie do dowodu znanych tożsamości aktuarialnych. Załóżmy, że stopa procentowa jest stała. Wtedy stopa dyskontowa d jest również stała, a więc $\mathbf{d} * \mathbf{b} = d\mathbf{b}$ oraz $\ddot{a}_x(\mathbf{d} * \mathbf{b}) = d\ddot{a}_x(\mathbf{b})$ dla dowolnego wektora $\mathbf{b}$.

Załóżmy, że $\mathbf{b} = 1_\infty$. Wtedy $\Delta\mathbf{b} = (1, 0_\infty)$, a więc $\ddot{a}_x(\Delta\mathbf{b}) = 1$. Z Twierdzenia 1 otrzymujemy

$$A_x = A_x(1_\infty) = 1 - d\ddot{a}_x(1_\infty) = 1 - d\ddot{a}_x.$$

a więc również

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}.$$

Jest to wzór wyrażający obecną wartość jednostkowej renty na całe życie przez składkę w jednostkowym ubezpieczeniu na całe życie.

Podobny wzór można otrzymać dla ubezpieczenia na życie i dożycie. Przyjmijmy $\mathbf{b} = (1_n)$. Wtedy $\Delta\mathbf{b} = (1, 0, \dots, 0, -1)$, gdzie -1 jest $(n+1)$–szą współrzędną wektora $\Delta\mathbf{b}$, a więc $\ddot{a}_x(\Delta\mathbf{b}) = 1 - y_x(n)$. Na mocy Twierdzenia 1 mamy

$$A_x(1_n) = 1 - y_x(n) - d\ddot{a}_x(1_n)$$

oraz przy użyciu standardowych oznaczeń aktuarialnych

$$A_{x:\overline{n}|} = A_x(1_n) + y_x(n) = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|},$$

czyli

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}.$$

6. Standardowe oznaczenia

Składki jednorazowe

$$A_x = A_x(1_\infty), \qquad A^1_{x:\overline{n}|} = A_x(1_n),$$

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = y_x(n), \qquad A_{x:\overline{n}|} = A_x(1_n) + y_x(n),$$

$${}_{k|}A_x = (0_k, 1_\infty), \qquad {}_{k|}A_x = (0_k, 1_n).$$

Składki okresowe coroczne w ubezpieczeniach dla x–latka

- P_x składka w ubezpieczeniu na całe życie, płacona dożywotnio;
- ${}_hP_x$ składka w ubezpieczeniu na całe życie, płacona przez h lat;
- $P^1_{x:\overline{n}|}$ składka w ubezpieczeniu terminowym na n lat, płacona przez n lat;
- ${}_hP_{x:\overline{n}|}$ składka w ubezpieczeniu na życie i dożycie na n lat, płacona przez h lat.