OGÓLNE RENTY ŻYCIOWE

M. BIENIEK

Rentą życiową nazywamy kontrakt między ubezpieczycielem a ubezpieczonym, w którym ubezpieczony w zamian za określoną opłatę, zwaną *składką*, otrzymuje ciąg z góry określonych płatności w ustalonych chwilach w przyszłości. Płatności dokonywane będą tylko w przypadku, gdy ubezpieczony żyje, a więc ustają one z chwilą śmierci ubezpieczonego.

1. Obliczenie jednorazowej składki renty

Zakładamy, że dana jest pewna tablica trwania życia, która opisuje przyszłe życie ubezpieczonego, oraz funkcja dyskonta v, która modeluje efekty inwestycji finansowych.

Rozważmy kontrakt rentowy dla x–latka, gdzie x jest liczba całkowitą. Zakładamy, że płatności z tytułu tej renty będą następować na początku każdego roku, w wysokości c_k w chwili k. Oczywiście niektóre wartości c_k mogą być równe 0, co odpowiada braku płatności w danym roku. Zatem kontrakt ten opisany jest przez wektor przepływów $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{\omega-x-1})$. W takim przypadku będziemy nazywać $\mathbf{c}$ wektorem *świadczeń rentowych*. Zauważmy, że ostatnia płatność może nastąpić w chwili $\omega-1$, co jest ostatnią chwilą kiedy ktokolwiek może jeszcze żyć.

Załóżmy teraz, że kontrakt ten ma być opłacony przez x–latka pojedynczą składką na początku trwania kontraktu, a więc w chwili 0. Pierwszy problem, to wyznaczenie wysokości tej składki. Podstawowym kryterium jest to, że wszystkie składki opłacone przez wszystkich rentobiorców, wraz z zarobionymi odsetkami, powinny wystarczyć na opłacenie wszystkich żądanych świadczeń.

Rozważmy najpierw najprostszy możliwy przypadek, czyli $\mathbf{c} = \mathbf{e}^k$. Przypomnijmy, że wszystkie współrzędne wektora $\mathbf{e}^k$ są równe 0, za wyjątkiem k–tej współrzędnej, która wynosi 1. Mamy zatem do czynienia z rentą składającą się z jednej płatności w wysokości 1 w chwili k, jeżeli ubezpieczony dożyje do wieku $x + k$. Taki kontrakt nazywany jest *czystym ubezpieczeniem na dożycie*. Niech E oznacza wysokość składki za takie ubezpieczenie. Załóżmy, że ℓ_x osób w wieku x kupuje taki kontrakt. Całkowita kwota zebrana w postaci składek wynosi więc $\ell_x E$, która po czasie k zakumuluje do wartości $\ell_x E v(k, 0)$. W chwili k pozostanie przy życiu ℓ_{x+k} osób, i każda z nich musi dostać 1 PLN. Oznacza to, że

$$\ell_x E v(k, 0) = \ell_{x+k},$$

a więc

$$E = v(k,0)^{-1}\frac{\ell_{x+k}}{\ell_x} = v(k)_k p_x.$$

Wynika stąd łatwo wzór na jednorazową składkę dowolnej renty życiowej dla x–latka z wektorem świadczeń $\mathbf{c}$. Niech $\ddot{a}_x(\mathbf{c})$ oznacza wysokość tej składki. Taki kontrakt można rozważać jako ciąg czystych ubezpieczeń na dożycie, z których każde odpowiada tylko jednej chwili k, kiedy to z tytułu ubezpieczenia na dożycie x–latek otrzymuje kwotę c_k (oczywiście, jeśli w tej chwili żyje). Składka za takie ubezpieczenie wynosi $c_k v(k)_k p_x$, a składkę za całą rentę obliczamy jako sumę składek za każde z ubezpieczeń. Zatem

$$\ddot{a}_x(\mathbf{c}) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} c_k v(k)_k p_x.$$

Oczywiście, wartość $\ddot{a}_x(\mathbf{c})$ zależy również od wyboru funkcji dyskonta v, ale pomijamy tę zależność w oznaczeniu.

W praktyce spotyka się trzy rodzaje rent życiowych: terminowe, bezterminowe i odroczone.

Renty terminowe to takie, w których $c_k = 0$ począwszy od pewnego k. Zatem płatność takiej renty ustaje w penym momencie, nawet jeśli ubezpieczony dalej żyje. Renty bezterminowe to renty, które dają niezerowe płatności bez względu na to jak długo ubezpieczony żyje. Renty odroczone to kontraktu, w których początkowa płatność świadczenia następuje dopiero po pewnym z góry określonym czasie. Matematycznie oznacza to, że początkowe przepływy wektora świadczeń są zerowe, a więc nie renty takie nie wymagają żadnych specjalnych wzorów. Wektor świadczeń jest wtedy postaci $\mathbf{c} = (0_k, \mathbf{d})$, a chwila k nazywana jest okresem odroczenia.

2. Zdyskontowana funkcja przeżycia

Zauważmy, że wzór na obecną wartość renty życiowej $\ddot{a}_x(\mathbf{c})$ ma podobną postać do wzoru na obecną wartość wektora $\mathbf{c}$ względem funkcji dyskonta v, czyli

$$\ddot{a}(\mathbf{c}; v) = \sum_{k=0}^{N} c_k v(k).$$

Określmy

$$y_x(n) = v(n)_n p_x,$$

i rozszerzmy tę definicję do funkcji dwóch zmiennych

$$y_x(k,n) = \frac{y_x(n)}{y_x(k)},$$

dla liczb całkowitych $n, k \geqslant 0$. Korzystając z własności mnożenia dla prawdopodobieństw przeżycia, łatwo pokazać, że y_x spełnia warunek

$$y_x(k,m)y_x(m,n) = y_x(k,n),$$

dla dowolnych $k, m, n \geqslant 0$, a więc y_x jest funkcją dyskonta. Ponadto dla $k \leqslant n$

$$y_x(k,n) = \frac{y_x(n)}{y_x(k)} = v(k,n)_{n-k}p_{x+k}, \tag{A}$$

a dla $k > n$

$$y_x(k,n) = \frac{v(k,n)}{{}_{k-n}p_{x+n}}. \tag{B}$$

Zatem na przykład przy założeniu stałej stopy procentowej

$$y_x(2,5) = v^3{}_3p_{x+2}, \qquad y_x(5,2) = \frac{(1+i)^3}{{}_3p_{x+2}}.$$

Zauważmy, że ostatnia wielkość, podająca wartość w chwili 5 z inwestycji 1 PLN w chwili 2, jest większa niż $(1+i)^3$, czyli kwota powstająca jedynie z odsetek. Odzwierciedla to dodatkowy zysk wynikający z przeżycia.

Funkcję y_x będziemy nazywać *zdyskontowaną funkcją przeżycia.* Łatwo teraz zauważyć, że

$$\ddot{a}_x(\mathbf{c}) = \ddot{a}(\mathbf{c}; y_x),$$

a więc jednorazowa składka renty życiowej to po prostu wartość obecna wektora świadczeń $\mathbf{c}$ względem funkcji dyskonta y_x. Zatem wszystkie wyniki dotyczące wartości obecnych przepływów mogą być zastosowane dla rent życiowych.

Przy obliczaniu $\ddot{a}_x(\mathbf{c})$ wygodnie jest czasami korzystać ze zależności rekurencyjnej

$$y_x(k+1) = y_x(k)v(k,k+1)p_{x+k}.$$

Oznaczenie 1. Rozważmy wektor $\mathbf{c} = (1_{\omega-x})$ odpowiadający ciągowi jednostkowych płatności do końca życia x–latka. Dla prostoty oznaczeń wektor taki będziemy pomijać w zapisie. Zatem, kiedykolwiek pomijamy w zapisie wektor, to rozumiemy, że jest to właśnie $(1_{\omega-x})$. Na przykład, $\ddot{a}_x$ oznacza jednorazową składkę renty bezterminowej, która daje płatności w wysokości 1 na początku każdego roku życia ubezpieczonego, począwszy od chwili 0.

W przypadku, gdy płatności są rozciągnięte na całe życie, ale nie są stałe, wygodnie jest czasami unikać specyfikacji ω pisząc symbol 1_∞ na oznaczenie wektora płatności do chwili $\omega - 1$. Na przykład, jeżeli $\omega = 120$, to możemy napisać $\ddot{a}_{40}(2_{15}, 1_\infty)$ zamiast $\ddot{a}_{40}(2_{15}, 1_{65})$.

W dalszym ciągu przez v będziemy oznaczać funkcję dyskonta związaną z oprocentowaniem, odzwierciedlającą zyski z inwestycji kapitału. Będziemy używać litery y do oznaczenia ogólnej funkcji dyskonta, którą może być v lub y_x lub dowolna inna funkcja dyskonta.

Rozważmy teraz związki pomiędzy y_x dla różnych wartości x. Zauważmy, że mamy teraz wiele funkcji dyskonta y_x, jedną dla każdego wieku początkowego x. Są one jednak związane w następujący sposób.

Przypomnijmy, że dla dowolnej funkcji dyskonta y zdefiniowaliśmy nową funkcję dyskonta wzorem

$$y \circ k(n,m) = y(n+k, m+k),$$

czyli

$$y \circ k(n) = y \circ k(0,n) = y(k, n+k).$$

Zatem stosując wzór (A) mamy

$$y_x \circ k(n) = y_x(k, k+n) = v(k, k+n)\, {}_np_{x+k} = v \circ k(n)\, {}_np_{x+k}.$$

Wzór ten mówi, że

$$y_x \circ k(\text{względem } v) = y_{x+k}(\text{względem } v \circ k).$$

W szczególności, jeżeli stopa procentowa jest stała, to

$$y_{x+k} = y_x \circ k,$$

oraz $y_x = y_0 \circ k$, a więc znając zdyskontowaną funkcję przeżycia dla wieku 0, znamy ją dla każdego innego wieku.

Oznaczenie 2. Niech $\ddot{a}_{\{x\}+k}(\mathbf{c})$ oznacza obecną wartość renty życiowej dla $(x+k)$–latka, która daje wypłatę w wysokości c_j w chwili $k+j$, obliczoną względem przesuniętej funkcji dyskonta $v \circ k$. Zatem

$$\ddot{a}_{\{x\}+k}(\mathbf{c}) = \sum_{j=0}^{\omega-x-k-1} c_j\, v \circ k(j)\, {}_jp_{x+k}.$$

Oczywiście, przy założeniu stałej stopy procentowej, mamy $v \circ k = v$, a więc $\ddot{a}_{\{x\}+k}(\mathbf{c}) = \ddot{a}_{x+k}(\mathbf{c})$, i oznaczenie takiego typu nie jest potrzebne.

Przykład 1. Aby zilustrować wprowadzoną notację obliczymy $\ddot{a}_{60}(\mathbf{c})$, $\ddot{a}_{\{59\}+1}(\mathbf{c})$ oraz $\ddot{a}_{\{58\}+2}(\mathbf{c})$ przy następujących danych $\mathbf{c} = (1,2,3,4)$, $q_{60} = 0.05$, $q_{61} = 0.1$, $q_{62} = 0.15$ oraz $i_0 = i_1 = 0.04$, $i_k = 0.08$ dla $k \geqslant 2$.

Mamy $p_{60} = 0.95$, ${}_2p_{60} = p_{60}p_{61} = 0.95 \cdot 0.9 = 0.855$ oraz ${}_3p_{60} = 0,72675$ oraz $v(1) = 1.04^{-1}$, $v(2) = 1.04^{-2}$, $v(2+k) = 1.04^{-2}1.08^{-k}$, dla $k \geqslant 1$. Stąd

$$\ddot{a}_{60}(\mathbf{c}) = \sum_{k=0}^{3} c_k v(k)\, {}_kp_{60} = 7,687.$$

Dalej

$$\ddot{a}_{\{59\}+1}(\mathbf{c}) = \sum_{k=0}^{3} c_k \frac{v(k+1)}{v(1)}\, {}_kp_{60} = 7,507.$$

Jest to kwota jaką osoba obecnie 59–letnia zapłaci za rok, aby otrzymywać przez kolejne 3 lata świadczenia w wysokości 1, 2, 3 oraz 4. Ponadto,

$$\ddot{a}_{\{58\}+2}(\mathbf{c}) = \sum_{k=0}^{3} c_k \frac{v(k+2)}{v(2)}\, {}_kp_{60} = 7,266.$$

Jest to kwota jaką osoba obecnie 58–letnia zapłaci za dwa lata, aby otrzymywać przez kolejne 3 lata świadczenia w wysokości 1, 2, 3 oraz 4.

Korzystając z wyprowadzonej wcześniej zależności

$$\mathrm{Val}_k({}^k\mathbf{c}, v) = \ddot{a}(\mathbf{c} \circ k; v \circ k)$$

otrzymujemy więc

$$\begin{aligned}\mathrm{Val}_k({}^k\mathbf{c}; y_x) &= \ddot{a}(\mathbf{c} \circ k; y_x \circ k)\\ &= \ddot{a}_{x+k}(\mathbf{c} \circ k; v \circ k) = \ddot{a}_{\{x\}+k}(\mathbf{c} \circ k).\end{aligned}$$

Stąd dostajemy nową wersję tożsamości podziału

$$\ddot{a}(\mathbf{c}; v) = \ddot{a}({}_k\mathbf{c}; v) + v(k)\ddot{a}(\mathbf{c} \circ k; v \circ k),$$

a więc przy użyciu rent życiowych otrzymujemy tożsamość podziału w postaci

$$\ddot{a}_x(\mathbf{c}) = \ddot{a}_x({}_k\mathbf{c}) + y_x(k)\ddot{a}_{\{x\}+k}(\mathbf{c} \circ k). \tag{C}$$

W szczególnym przypadku, gdy $\mathbf{c} = (1_\infty)$ oraz stopa procentowa jest stała, mamy ${}_k\mathbf{c} = (1_k)$ oraz $\mathbf{c} \circ k = (1_\infty)$, a więc

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_x(1_k) + v^k{}_np_x\, \ddot{a}_{x+k}.$$

Wzory tego typu były popularne przed rozpowszechnieniem komputerów. Ten konkretny wzór służył do wyznaczania składki renty terminowej na n lat przy użyciu tablicy składek rent na całe życie.

Wzór (C) jest użyteczny zwłaszcza do wyrażenia wartości obecnej renty odroczonej $\ddot{a}_x(\mathbf{c})$, gdzie $\mathbf{c} = (0_k, \mathbf{d})$ w terminach tylko wektora $\mathbf{d}$. Mamy bowiem ${}_k\mathbf{c} = 0$, oraz $\mathbf{c} \circ k = \mathbf{d}$, a więc

$$\ddot{a}_x(\mathbf{c}) = y_x(k)\ddot{a}_{\{x\}+k}(\mathbf{d}).$$

3. Renty życiowe z gwarantowanymi płatnościami

Załóżmy, że rentobiorca kupuje rentę życiową i umiera wkrótce po zapłaceniu składki. Osoba ta nie dostanie zatem nic, z wyjątkiem być może płatności w chwili 0 jeśli jest ona niezerowa. Nawet mimo tego, że składka uwzględnia taką możliwość, spadkobiorcy zmarłego mogą mieć zastrzeżenia do zakładu ubezpieczeń o przepadek funduszy. Poza tym możliwość straty pieniędzy może być zniechęcająca dla niektórych potencjalnych klientów zakładu ubezpieczeń. Z tego względu wielu ubezpieczycieli oferuje możliwość wykupienia renty życiowej z okresem gwarantowanym. W typowym kontrakcie takiego typu jest zapis, że przez pewien okres czasu (np. 10 czy 15 lat), świadczenia będą wypłacane niezależnie od tego czy ubezpieczony żyje czy nie. Po tym okresie renta zmienia się w zwykłą rentę życiową, w której wypłaty następują tylko dopóki ubezpieczony żyje. Oczywiście okres gwarantowany oznacza, że za te same świadczenia należy zapłacić

wyższą składkę. Aby wyznaczyć wysokość składki najłatwiej jest rozważać rentę z okresem gwarantowanym jako dwa osobne kontrakty, jeden dla płatności gwarantowanych, a drugi dla zwykłych płatności, a potem zsumować składki za każdy z kontraktów. Rozważymy dwa przykłady takich rent.

Przykład 2. Osoba w wieku lat 40 wykupuje rentę życiową, która daje coroczne płatności w wysokości 10000 począwszy od wieku 41 lat, przy czym pierwszych dziesięć płatności jest gwarantowanych. Obliczymy ile należy zapłacić za taką rentę.

Składka za gwarantowane płatności wynosi

$$10000\ddot{a}(\mathbf{c}; v), \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{c} = (0, 1_1 0).$$

Składka za płatności niegwarantowane wynosi

$$10000\ddot{a}_{40}(\mathbf{d}), \text{gdzie} \quad \mathbf{d} = (0_{11}, 1_\infty).$$

Zatem całkowita składka wynosi

$$10000[\ddot{a}(\mathbf{c}; v) + \ddot{a}_{40}(\mathbf{d})].$$

Przykład 3. Osoba w wieku 40 lat wykupuje rentę życiową, która daje wypłaty coroczne w wysokości 1, począwszy od wieku 65 lat. Jeżeli ubezpieczony dożyje do wieku 65 lat, otrzyma co najmniej 10 wypłat, a w przeciwnym razie ubezpieczyciel nie wypłaca żadnych świadczeń. Wyznaczymy składkę takiej renty.

Składka za niegwarantowane płatności wynosi $\ddot{a}_{40}(0_{35}, 1_\infty)$. Płatności gwarantowane są w tym przypadku odroczone, a ich wartość za 25 lat wyniesie $\mathrm{Val}_{25}(0_{25}, 1_{10}; v)$. Aby wyznaczyć ich wartość obecną należy pomnożyć powyższą wartość przez $y_{40}(25) = v(25)_{25}p_{40}$. Pomnożenie tylko przez $v(25)$ dałoby błędny wynik, gdyż wypłata gwarantowanych płatności warunkowana jest przez dożycie ubezpieczonego do wieku 65. Zatem całkowita składka wynosi

$$\ddot{a}_{40}(0_{35}, 1_\infty) + y_{40}(25)\,\mathrm{Val}_{25}(0_{25}, 1_{10}; v),$$

co można również zapisać jako

$$v(35)_{35}p_{40}\ddot{a}_{\{40\}+35} + v(25)_{25}p_{40}\ddot{a}(1_{10}; v \circ 25).$$

W ogólnym przypadku niech $\mathbf{u}$ oznacza wektor gwarantowanych płatności pod warunkiem, że rentobiorca przeżyje do chwili g. W przykładzie 2 mamy $g = 0$ i $\mathbf{u} = (1_{10})$, a w Przykładzie 3 mamy $g = 25$ i $\mathbf{u} = (0_{25}, 1_{10})$. Oczywiście możemy założyć, że g pierwszych współrzędnych wektora $\mathbf{u}$ to zera, a więc $\mathbf{u} = (0_g, \mathbf{w})$ dla pewnego wektora $\mathbf{w}$. Wtedy rozumując jak wyżej otrzymamy wartość obecną świadczeń gwarantowanych w postaci

$${}_gp_x\,\ddot{a}(\mathbf{u}; v) = v(g)_gp_x\,\ddot{a}(\mathbf{w}; v \circ g),$$

co jest równe obecnej wartości względem funkcji dyskonta v pomnożonej przez prawdopodobieństwo tego, że płatności nastąpią.

4. Renty odroczone ze składkami okresowymi

Renty odroczone są często opłacane przez ciąg składek rocznych, a nie za jednorazową składkę. Okres opłacania składek może być dowolnej długości nie przekraczającej okresu odroczenia tak, że płatność składek kończy się zanim zaczną się wypłaty świadczeń. Przykładem takich kontraktów są ubezpieczenia emerytalne, gdzie ubezpieczony płaci składki do osiągnięcia wieku emerytalnego, a następnie odbiera okresowe świadczenia emerytalne.

Ciąg corocznych płatności składek może być opisany przez *wektor wzorca składek*. Jest to wektor $\boldsymbol{\rho}$ taki, że $\rho_0 = 1$. Wtedy ρ_k oznacza jaką część składki płatnej w chwili 0 stanowi składka płacona w chwili k. Jeśli znamy składkę w chwili 0, czyli *składkę początkową*, to wektor wzorca składek wyznacza wszystkie pozostałe składki. Mianowicie, jeżeli π_k oznacza wysokość składki w chwili k, to

$$\pi_k = \pi_0 \rho_k.$$

Wektor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ nazywamy *wektorem składki*.

Załóżmy, że x–latek wykupuje rentę życiową, której pierwszą płatność odbierze w wieku $x+n$. Najczęstszym wektorem wzorca składki jest $\boldsymbol{\rho} = (1_n)$, co oznacza, że wszystkie składki są jednakowej wysokości i kończą się rok przed pierwszą płatnością renty. Jednakże niektórzy ubezpieczeni mogą preferować wyższą składkę, ale przez krótszy okres, czyli $\boldsymbol{\rho} = (1_m)$, dla pewnego $m < n$. Jeszcze inni mogą preferować niższe składki na początku, a potem większe. Na przykład, wektor wzorca $\boldsymbol{\rho} = (1_k, 2_{n-k})$ oznacza, że roczna składka po k latach ulega podwojeniu.

Zauważmy teraz, że płatności składki również stanowią rentę życiową, gdyż ich płatność ustaje z chwilą śmierci ubezpieczonego. Aby składki wraz z odsetkami pokryły płatności renty poziom składek musi być wyznaczony tak, aby składki były równoważne aktuarialnie przyszłym świadczeniom względem zdyskontowanej funkcji przeżycia y_x.

Przykład 4. Renta życiowa dla 40–latka zapewnia coroczne wypłaty w wysokości 1 począwszy od wieku 65 lat. Roczne składki są opłacane przez 25 lat, przy czym poziom składki maleje o połowę po 15 latach. Wyznaczymy wzór na początkową składkę, przy założeniu, że $\omega = 110$.

Przyrównując wartości obecne otrzymamy

$$\ddot{a}_{40}(\mathbf{c}) = \ddot{a}_{40}(\boldsymbol{\pi}) = \pi_0 \ddot{a}_{40}(\boldsymbol{\rho}),$$

gdzie

$$\mathbf{c} = (0_{25}, 1_{45}), \quad \boldsymbol{\rho} = (1_{15}, 0.5_{10}).$$

Stąd

$$\pi_0 = \frac{\ddot{a}_{40}(\mathbf{c})}{\ddot{a}_{40}(\boldsymbol{\rho})}.$$

5. Standardowe oznaczenia

Renty życiowe terminowe

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x(1_n), \qquad a_{x;\,\overline{n}|} = \ddot{a}(0, 1_n);$$

$$Ia_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x(0, 1, 2, \dots, n), \qquad I\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x(1, 2, \dots, n)$$

$$Da_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x(0, n, n-1, \dots, 2, 1), \qquad D\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x(n, n-1, \dots, 2, 1)$$

Renty życiowe bezterminowe

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_x(1_\infty), \qquad a_x = \ddot{a}(0, 1_\infty);$$

$$Ia_x = \ddot{a}_x(0, 1, 2, \dots), \qquad I\ddot{a}_x = \ddot{a}_x(1, 2, \dots)$$

Przykładowa tożsamość podziału

$$\ddot{a}_{x:\overline{n+k}|} = \ddot{a}_{x:\overline{k}|} + v^k {}_kp_x \, \ddot{a}_{x+k:\overline{n}|}.$$