TABLICE TRWANIA ŻYCIA

M. BIENIEK

W tym wykładzie przypomnimy pojęcie tablicy trwania życia oraz różne oznaczenia z nią związane.

1. Podstawowe definicje

Tablice trwania życia są podstawowym narzędziem umożliwiającym szacowanie reguł śmiertelności w danej populacji ludzi. Niech ℓ_0 oznacza dowolną liczbę, typowo jest to 100000. Załóżmy, że zaczynamy z grupą (populacją) złożoną z ℓ_0 noworodków. Chcemy prognozować, ilu członków populacji będzie jeszcze żyć w dowolnie ustalonym momencie w przyszłości. Niech ℓ_x oznacza liczbę członków oryginalnej populacji, którzy dożyja do wieku x, i niech d_x oznacza liczbę zmarłych w wieku pomiędzy x i $x+1$. Oczywiście

$$\ell_{x+1} = \ell_x - d_x.$$

Tablicą trwania życia jest to tabela zawierająca wartości ℓ_x i d_x dla $x = 0, 1, 2, \ldots, \omega$, gdzie ω jest wiekiem granicznym populacji, tzn. $\ell_\omega = 0$. Faktyczna wartość ω może być w każdej tablicy inna, zwykle wynosi 100 lub 110.

2. Prawdopodobieństwa przeżycia i śmierci

Zakładamy od teraz, że dana jest pewna tablica trwania życia, a więc dane są wartości (x, ℓ_x) dla $x = 0, 1, 2, \ldots, \omega$. Biorąc teraz ustalonego członka danej populacji nie wiem, czy będzie on czy nie wśród tych, którzy przeżyją do ustalonego wieku. Dlatego musimy wprowadzić pomocnicze oznaczenia probabilistyczne. Dla liczb całkowitych $x, n \geqslant 0$, oznaczamy

$${}_np_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$$

prawdopodobieństwo tego, że osoba w wieku x dożyje do wieku $x+n$ (czyli przeżyje n lat). Ponadto niech

$${}_nq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x}$$

oznacza prawdopodobieństwo tego, że osoba w wieku x umrze przed osiągnięciem wieku $x+n$ lat (czyli umrze w ciągu n lat). Oczywiście

$${}_nq_x = 1 - {}_np_x.$$

Jeżeli $n = 1$, to można je pominąć w oznaczeniu, tzn. $p_n = {}_1p_x$ oraz $q_x = {}_1q_x$. Wielkość q_x nazywana jest czasami współczynnikiem śmiertelności w wieku x.

Dalej, niech

$$ {}_{n|k}q_x = \frac{\ell_{x+n} - \ell_{x+n+k}}{\ell_x} $$

oznacza prawdopodobieństwo tego, że osoba w wieku x przeżyje n lat, a następnie umrze w ciągu k lat. Mamy

$$ {}_{n|k}q_x = {}_np_x - {}_{n+k}p_x = {}_np_x\, {}_kq_{x+n}. $$

Na przykład, aby umrzeć w wieku pomiędzy $x+n$ a $x+n+k$, x–latek musi najpierw przeżyć n lat (z prawdopodobieństwem ${}_np_x$), a następnie mając lat $x+n$ musi umrzeć w ciągu k lat (z prawdopodobieństwem ${}_kq_{x+n}$).

Inną użyteczną tożsamością jest tzw. *reguła mnożenia*, czyli

$$ {}_{n+k}p_x = {}_np_x\, {}_kp_{x+n}, $$

dla dowolnych nieujemnych liczb całkowitych n, k oraz x. Mówi ona, że aby przeżyć $n+k$ lat, x–latek musi najpierw przeżyć n lat, a następnie mając $x+n$ lat musi przeżyć kolejne k lat.

W praktyce tablice trwania życia często konstruuje się przyjmując jako dane prawdopodobieństwa q_x dla $x = 0, 1, 2, \ldots$. Wyznaczenie wartości tych prawdopodobieństw jest skomplikowanym problemem statystycznym i nie będziemy się nim zajmować. Jeśli dane są wartości q_x, to tablicę trwania życia można skonstruować indukcyjnie, zaczynając od danej wartości ℓ_0 i korzystając ze wzorów

$$ d_x = \ell_x q_x, \qquad \ell_{x+1} = \ell_x - d_x, $$

które łatwo wynikają z podanych wyżej wzorów.

3. Oczekiwana długość życia

Oczekiwana długość życia jest jednym z najczęściej cytowanych pojęć aktuarialnych. Wielkość ta odpowiada na pytanie: jak długo osoba wieku x może spodziewać się jeszcze żyć? Oczywiście niektóre osoby w populacji, które są obecnie w wieku x umrą wcześniej, a inne później, więc chcemy znać wielkość średnią. Aby ją wyznaczyć należałoby obserwować wybraną populację osób w wieku x, do momemtu aż wszyscy członkowie populacji umrą. Sumując czasy życia od wieku x wszystkich osobników otrzymamy łączny przyszły czas życia x–latków, i dzieląc go przez ich liczbę otrzymalibyśmy średnią długość życia x–latków.

Mając jednak dane tablice trwania życia nie musimy przeprowadzać takiego eksperymentu. Przypuśćmy, że mamy grupę ℓ_x ludzi w wieku x. Po roku z grupy tej przeżyje ℓ_{x+1} osób, z których każda dokłada 1 rok do całkowitego przyszłego czasu życia. Na koniec drugiego roku pozostanie ℓ_{x+2} żyjących osób, z których każda dokłada 1 rok

do całkowitego czasu życia. Kontunuując w ten sposób, możemy oszacować całkowity przyszły czas życia wszystkich x–latków z populacji przez sumę

$$\ell_{x+1} + \ell_{x+2} + \ldots + \ell_{\omega-1},$$

a więc, dzieląc przez ℓ_x, otrzymamy wielkość

$$e_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} \frac{\ell_{x+k}}{\ell_x} = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} {}_kp_x.$$

Wielkość e_x jest znana jako *obcięty oczekiwany czas życia* osoby w wieku x. Słowo "obcięty" odnosi sie do faktu, że w powyższym rozumowaniu uwzględnialiśmy tylko liczbę pełnych lat przeżywanych przez osobników, ignorując ułamki roku przeżywane w roku śmierci. Zaokrąglamy do zera wszystkie ułamki od 0 do 1, i wydaje się rozsądne przyjąć, że średnio taki ułamek wynosi $\frac{1}{2}$. Zatem *oczekiwany czas życia* osoby w wieku x wynosi w przybliżeniu

$$\mathring{e}_x = e_x + \frac{1}{2}.$$

Aby obliczyć e_x dla wszystkich wartości x możemy użyć prostej zależności rekurencyjnej. Mianowicie,

$$\begin{aligned} e_x &= p_x + {}_2p_x + {}_3p_x + \ldots + {}_{\omega-x-1}p_x \\ &= p_x\left(1 + p_{x+1} + {}_2p_{x+1} + \ldots + {}_{\omega-x-2}p_{x+1}\right) \\ &= p_x(1 + e_{x+1}). \end{aligned}$$

Druga linijka wynika z reguły mnożenia dla prawdopodobieństw przeżycia. Zauważmy, że jest to rekurencja wstecz, gdyż podaje wartości funkcji w terminach wartości następnej. Rekurencja zaczyna się wtedy od wartości $e_\omega = 0$.

Powyższy wzór ma również proste uzasadnienie intuicyjne. Aby przeżyć dowolną liczbę pełnych lat w przyszłości, x–latek musi najpierw przeżyć jeden rok (z prawdopodobieństwem p_x). Ma już zatem przeżyty jeden rok i mając lat $x + 1$, przeżyje jeszcze średnio e_{x+1} pełnych lat.

Rozważając oczekiwany czas życia x–latka należy pamiętać o dwóch faktach. Po pierwsze, $\mathring{e}_x$ jest funkcją x, a po drugie, że $\mathring{e}_x$ jest średnim przyszłym czasem trwania życia x–latka, a nie średnim wiekiem w chwili śmierci.

Oprócz $\mathring{e}_x$ i e_x czasami będzie nas interesować średnie długość trwania życia x–latka w ciągu najbliższych n lat, gdzie n jest ustaloną chwilą w przyszłości. Wielkość

$$e_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ell_{x+k}}{\ell_x} = \sum_{k=1}^{n} {}_kp_x,$$

jest znana jako *obcięta terminowa oczekiwana długość życia* x–latka w ciągu n lat. Podaje ona spodziewaną liczbę pełnych lat jakie przeżyje x–latek w ciągu najbliższych n lat. Aby podać przybliżenie dla *terminowej oczekiwanej długości życia* wystarczy

zauważyć, że w ciągu n lat z grupy ℓ_x osób w wieku x, umrze $\ell_x - \ell_{x+n}$ osób, a więc szukane przybliżenie to

$$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = e_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{2}{}_n q_x.$$