OGÓLNY MODEL MATEMATYKI FINANSOWEJ

M. BIENIEK

W tym wykładzie przedstawimy ogólny model matematyki finansowej, używany w dalszym ciągu. Wprowadzimy również wiele pojęć i oznaczeń stosowanych w dalszych wykładach.

1. Przepływy pieniądza

Konstrukcję modelu zaczynamy od ustalenia jednostki czasu i jednostki kapitału. Zwykle jednostką czasu będzie 1 rok, chwila 0 oznacza chwilę obecną, a chwila n oznacza moment za n lat od chwili obecnej. Jednostką kapitału będzie 1 PLN.

Zakładamy, że w chwilach 0, 1, 2, ..., otrzymujemy lub płacimy pewną ilość pieniędzy. Kwotę uzyskana lub wydana w chwili k oznaczamy przez c_k i nazywamy *łącznym przepływem* w chwili k. Dodatnia wartość c_k oznacza, że kwotę tą otrzymujemy, a ujemna wartość, że sumę tą płacimy. Cała transakcja opisana jest przez wypisanie kolejnych przepływów w postaci *wektora przepływu*

$$\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_N),$$

gdzie N znacza chwilę ostatniej płatności.

Przykład 1. Załóżmy, że Jaś pożycza Małgosi 10 PLN teraz i 5 PLN za rok. Małgosia spłaci pożyczkę w trzech corocznych ratach po 7 PLN każda, przy czym pierwsza płatność nastąpi za 3 lata od teraz. Sytuację tę z punktu widzenia Jasia opisuje przepływ $\mathbf{c} = (-10, -5, 0, 7, 7, 7)$, a z punktu widzenia Małgosi — wektor $-\mathbf{c} = (10, 5, 0, -7, -7, -7)$.

Rozważając konkretny dany wektor przepływu można postawić następujące pytania:

- Kiedy transakcja jest warta podjęcia?
- Ile należy zapłacić, aby otrzymywać dany wektor przepływów?
- Jaka opłatę należy pobrać, aby płacić dany wektor przepływów?
- Jak porównać dwie transakcje, aby zdecydować która jest korzystniejsza?

Aby odpowiedzieć na te pytania musimy rozważać *wartość pieniądza w czasie*, gdyż dana suma pieniędzy dostępna dziś ma teraz większą wartość niż taka sama suma, ale dostępna np. za rok. Zmiana wartości kapitału w czasie jest opisana przez tzw. *funkcje dyskonta*.

2. Funkcje dyskonta

Chcemy wycenić ciąg przepływów, które są płatne w różnych chwilach czasu. Niech $v(s,t)$ oznacza wartość w chwili s kwoty 1 PLN płaconej (dostępnej) w chwili t. Innymi słowy, 1 PLN płatny w chwili t jest równoważny kwocie $v(s,t)$ płatnej w chwili s. Jeżeli $s < t$, to $v(s,t)$ interpretujemy jako kwotę, którą należy zainwestować w chwili s, aby uzyskać 1 PLN w chwili t. Jeżeli natomiast $s > t$, to interpretujemy $v(s,t)$ jako kwotę jaką zyskamy w chwili s, jeżeli zainwestujemy 1 PLN w chwili t.

Zauważmy, że w rzeczywistości zwykle wartość pieniądza w czasie **rośnie**, a więc $v(s,t) > 1$ dla $s > t$ oraz $v(s,t) < 1$ dla $s < t$. Na przykład, aby otrzymać 100 PLN za 1 rok chętnie wpłacimy dzisiaj kwotę *mniejszą* niż 100 PLN. Ale nikt nie chciałby w tym celu zapłacić więcej niż 100 PLN i dlatego zwykle $v(0,1) < 1$. Podobnie, jeśli dziś wpłacimy 100 PLN, to za rok chcielibyśmy odebrać *więcej* niż 100 PLN, i dlatego zwykle $v(1,0) > 1$. Jednakże z matematycznego punktu widzenia dopuszczać będziemy sytuację, gdy zachodzą nierówności przeciwne.

Oczywiście, jeżeli w chwili t chcemy zamiast 1 PLN otrzymać kwotę C, to jej wartość w chwili s wynosi $C\,v(s,t)$. Na przykład, aby mieć kwotę 20 za 10 lat, to obecnie musimy mieć kwotę $20v(0,10)$, a za pięć lat wystarczy mieć kwotę $20v(5,10)$. Podobnie, jeżeli dziś zainwestujemy kwotę 20, to za 10 lat będziemy mieć kwotę $20v(10,0)$, a jeśli natomiast inwestycja ta będzie za 5 lat, to za 10 lat (od dziś) będziemy mieć kwotę $20v(10,5)$.

Zauważmy teraz, że dla dowolnych chwil czasu s, t, u zachodzi zależność

$$v(s,t)v(t,u) = v(s,u).$$

Rzeczywiście, 1 PLN w chwili u jest równoważny $v(t,u)$ w chwili t, a ta z kolei kwota jest równoważna kwocie $v(s,t)v(t,u)$ w chwili s. Zatem 1 PLN w chwili u jest równoważny kwocie $v(s,t)v(t,u)$ w chwili s.

Definicja 1. *Funkcją dyskonta* nazywamy dowolną funkcję

$$v : [0,\infty) \times [0,\infty) \to (0,\infty),$$

która spełnia warunek

$$v(s,t)v(t,u) = v(s,u), \quad \text{dla dowolnych } s,t,u.$$

Z powyższej definicji łatwo uzyskujemy własności funkcji dyskonta. Mianowicie, kładąc $s = t = u$, otrzymamy $v(s,s)v(s,s) = v(s,s)$, a więc skoro v przyjmuje wartości dodatnie, to $v(s,s) = 1$ dla każdego s. Ponadto mamy $v(s,t)v(t,s) = v(s,s)$, a więc

$$v(s,t) = v(t,s)^{-1}.$$

W dalszym ciągu będziemy zawsze zakładać, że obydwie strony transakcji posługują się w jego wycenie tą samą funkcją dyskonta, chociaż w rzeczywistości nie zawsze musi to byc prawdą.

3. Wyznaczanie funkcji dyskonta

Rozważymy teraz jak wyznaczyć funkcję dyskonta. Oznaczmy

$$v(t) = v(0, t).$$

Z definicji funkcji dyskonta wynika, że $v(s, t) = v(s, 0)v(0, t)$, a więc z własności v otrzymujemy

$$v(s, t) = \frac{v(t)}{v(s)}, \quad \text{dla dowolnych } s, t.$$

W większości przypadków będziemy potrzebować wartości funkcji $v(s, t)$ tylko dla całkowitych wartości s i t. Na podstawie ostatniej równości, wystarczać będzie znajomość wartości $v(n)$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Aby wyznaczyć $v(n)$ zauważmy, że własność definiująca funkcję v może być indukcyjnie rozszerzona na dowolną liczbę chwil czasu. Mianowicie, dla dowolnych chwil czasu $t_1, t_2, \ldots, t_n$ mamy

$$v(t_1, t_2)v(t_2, t_3) \ldots v(t_{n-1}, t_n) = v(t_1, t_n).$$

Zatem w szczególności

$$v(n) = v(0, 1)v(1, 2) \ldots v(n - 1, n),$$

a więc wystarczy znajomość $v(n, n - 1)$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Mając dane te wartości wystarczy zastosować wzór rekurencyjny

$$v(n) = v(n - 1)v(n - 1, n), \quad v(0) = 1.$$

Całkowitą informacje jaką potrzebujemy zawiera wektor

$$\mathbf{v} = [v(0), v(1), \ldots, v(N)],$$

gdzie N jest chwilą ostatniej niezerowej płatności przepływu.

4. Stopy procentowe i dyskontowe

W praktyce, zamiast zadawać bezpośrednio wartości $v(k - 1, k)$, zwykle wyznaczmy je z odpowiednich stóp procentowych i dyskontowych. Dla dowolnej funkcji dyskonta v są one zdefiniowane następująco.

Definicja 2. *Stopą procentową* dla przedziału czasu od k do $k + 1$ nazywamy wielkość

$$i_k = v(k + 1, k) - 1.$$

Stopą dyskontową dla tego przedziału czasu nazywamy wielkość

$$d_k = 1 - v(k, k + 1).$$

Zauważmy, że inwestycja 1 PLN w chwili k przyniesie w chwili $k+1$ dochód w wysokości $v(k+1,k) = 1 + i_k$, i podobnie inwestycja $1 - d_k$ w chwili k przyniesie dochód 1 w chwili $k+1$. Zatem d_k jest wielkościa jaką należy odjąć od 1 PLN płatnego na koniec okresu, aby uzyskać równoważna kwotę na początku okresu.

Jeżeli dana jest jedna z trzech wartości $v(k,k+1)$, i_k i d_k, to pozostałe dwie mogą być łatwo wyznaczone. Na przykład,

$$d_k = i_k v(k,k+1) = \frac{i_k}{1+i_k}, \quad i_k = d_k v(k+1,k) = \frac{d_k}{1-d_k}.$$

Przykład 2. Aby uzyskać pewną intuicję dotyczącą rzeczywistych wartości funkcji dyskonta w zależności od stopy procentowej wystarczy przeanalizować wartości podane w tabeli. W dalszym ciągu w przykładach będziemy często stosować nierealistyczne

i_k	0%	1%	5%	20%	25%	50%	100%
$v(k,k+1)$	1	0.9901	0.9524	5/6	4/5	2/3	1/2

wielkości stóp procentowych jak 20%, 50% czy nawet 100%, gdyż dają one proste wartości funkcji dyskonta.

5. Stała stopa procentowa

W elementarnych kursach matematyki finansowej rozważany jest przypadek stałej stopy procentowej. Przypuśćmy, że wysokość odsetek od inwestycji zależy jedynie od długości czasu jej trwania, a nie zależy od chwili jej rozpoczęcia. Inaczej, zakładamy, że

$$v(s,s+h) = v(t,t+h), \quad \text{dla dowolnych nieujemych } s,t,h.$$

Wtedy

$$v(s+t) = v(0,s+t) = v(0,s)v(s,s+t) = v(0,s)v(0,t) = v(s)v(t).$$

Zatem otrzymaliśmy równanie funkcyjne dla funkcji $v(t)$, którego rozwiązaniem jest funkcja wykładnicza $v(t) = v^t$, a więc

$$v(s,t) = v^{t-s},$$

dla pewnej stałej v. Zauważmy, że $v = v(k,k+1)$ dla każdego $k = 0,1,2,\ldots$.

Dla takiej funkcji dyskonta, stopa procentowa i_k jest stała i wynosi $i = v^{-1} - 1$, oraz stopa dyskonta d_k jest stała i wynosi $d = 1 - v$. Zatem funkcja ta jest opisana jednym parametrem, którym zwykle jest stała stopa procentowa i. Na przykład, jeżeli chcemy obliczyć zysk z inwestycji 1 PLN na n lat, to wynosi on po prostu $v(n,0) = (1+i)^n$. Z drugiej strony, jeżeli chcemy mieć 1 PLN za n lat, to wystarczy obecnie zainwestować $v(0,n) = v^n$.

Przykład 3. Jaką stopę procentową opisuje funkcja dyskonta $v(t) = 2^{-t}$?

Wtedy $v(k) = 2^{-k}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$, a więc

$$v = v(k, k+1) = \frac{v(k+1)}{v(k)} = \frac{2^{-(k+1)}}{2^{-k}} = \frac{1}{2},$$

oraz

$$i = \frac{1}{v} - 1 = 1 = 100\%.$$

Zatem kapitał po każdym roku podwaja się.

6. Wartość przepływu pieniądza i równoważność aktuarialna

Połączymy teraz dwa kluczowe pojęcia: wektora przepływów i funkcji dyskonta. Załóżmy, że dany jest wektor przepływów $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_N)$ oraz funkcja dyskonta v. Chcemy wyznaczyć wysokość pojedynczej płatności w chwili 0 równoważnej całemu wektorowi przepływów, przy założeniu, że wartośc pieniądza w czasie modelowana jest funkcją v. Wielkość ta jest nazywana *wartością obecną* przepływu $\mathbf{c}$. Przepływ c_k w chwili k ma obecną wartość $c_k v(k)$ z definicji funkcji dyskonta. Gdy dodamy do siebie poszczególne wartości obecne każdego z przepływów, to otrzymamy

$$\text{Wartość obecna przepływu } \mathbf{c} = \sum_{k=0}^{N} c_k v(k).$$

Przykład 4. Załóżmy, że $v(k) = 2^{-k}$ dla wszystkich k. Taka funkcja dyskonta odpowiada stałej stopie procentowej 100% rocznie, a więc co roku nasz kapitał jest podwajany. Ponadto załóżmy, że mamy otrzymać 12 PLN w chwili 2, oraz zapłacić 8 PLN w chwili 3.

Zgodnie z powyższym wzorem obecna wartość takiej transakcji wynosi $12v(2) - 8v(3) = 12 \cdot \frac{1}{4} - 8 \cdot \frac{1}{8} = 2$. Aby sprawdzić ten wynik zauważmy, że 12 PLN otrzymane w chwili 2 będzie miało wartość 24 w chwili 3. Uwzględniając płatność 8 PLN, w chwili 3 zostanie nam 16 PLN. Z drugiej strony, gdybyśmy dostali 2 PLN w chwili 2, to po roku mamy 4 PLN, po dwóch latach — 8 PLN, a po trzech latach — 16 PLN, a więc w obydwu przypadkach mamy w chwili 3 tyle samo.

Zauważmy, że w powyższym przykładzie wygodnie było rozważyć wartość przepływu $\mathbf{c}$ w chwili ostatniej płatności, zwaną *wartością zakumulowaną*. Ogólnie, dla dowolnego przepływu $\mathbf{c}$ mamy

$$\text{Wartość zakumulowana przepływu } \mathbf{c} = \sum_{k=0}^{N} c_k v(N, k).$$

Reprezentuje ona stan majątku po otrzymaniu wszystkich przepływów z wektora $\mathbf{c}$.

Jeszcze ogólniej, można wyznaczyć wartość w dowolnej chwili pomiędzy 0 i N. Skupimy się na chwilach $n = 0, 1, \ldots, N$. Obliczamy wtedy obecną wartość przyszłych przepływów w chwili n i dodajemy wartość zakumulowaną już otrzymanych przepływów.

Definicja 3. Dla dowolnej chwili $n = 0, 1, \ldots, N$, *wartością w chwili* n wektora przepływów $\mathbf{c}$ względem funkcji dyskonta v nazywamy wielkość

$$\mathrm{Val}_n(\mathbf{c}; v) = \sum_{k=0}^{N} c_k v(n, k).$$

Wielkość ta reprezentuje pojedynczą kwotę jaką zaakceptowalibyśmy w chwili n w zamian za wszystkie pozostałe przepływy. Wartości tego samego przepływu $\mathbf{c}$ w różnych chwilach czasu są powiązane w bardzo prostą zależność. Zauważmy, że $v(m, k) = v(m, n)v(n, k)$, a więc

$$\mathrm{Val}_m(\mathbf{c}; v) = v(m, n)\,\mathrm{Val}_n(\mathbf{c}; v). \tag{A}$$

Równość tę łatwo również uzasadnić rozważając wartości przepływu $\mathbf{c}$ w różnych chwilach czasu.

Oznaczenie 1. Dla szczególnego przypadku wartości przepływu $\mathbf{c}$ w chwili 0 będziemy używać specjalnego symbolu. Niech

$$\ddot{a}(\mathbf{c}; v) = \mathrm{Val}_0(\mathbf{c}; v).$$

Litera a jest standardowym oznaczeniem aktuarialnym dla obecnej wartości renty, czyli ciągu okresowych płatności. Gdy rozważamy tylko jedną funkcję dyskonta v, to często będziemy opuszczać v i pisać po prostu $\mathrm{Val}_n(\mathbf{c})$ lub $\ddot{a}(\mathbf{c})$.

Zauważmy, że z definicji wartości przepływu $\mathbf{c}$ w chwili n, wynikają łatwo własności liniowości

$$\mathrm{Val}_k(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathrm{Val}_k(\mathbf{c}) + \mathrm{Val}_k(\mathbf{d}), \qquad \mathrm{Val}_k(\alpha\mathbf{c}) = \alpha\,\mathrm{Val}_k(\mathbf{c})$$

dla dowolnych wektorów przepływów $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$, liczby α i chwili k.

Często chcemy porównać wartości dwóch przepływów $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$. Służy temu następująca definicja.

Definicja 4. Dwa wektory przepływów $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$ są *równoważne aktuarialnie* względem funkcji dyskonta v, jeżeli dla *pewnej* chwili n

$$\mathrm{Val}_n(\mathbf{c}; v) = \mathrm{Val}_n(\mathbf{d}; v).$$

Zauważmy, że z własności (A) wynika, że jeśli powyższa równość zachodzi w pewnej chwili n, to musi zachodzić *w każdej* chwili $n = 0, 1, \ldots, N$.

Przykład 5. Adam pożycza Basi 20 PLN teraz i kolejne 10 PLN za rok. Basia obiecuje oddać pożyczkę w dwóch ratach w chwilach 2 i 3, przy czym płatność w chwili 3 ma być dwa razy większa niż w chwili 2. Ile będzie wynosić każda rata, jeżeli Adam chce uzyskać odsetki 25% rocznie?

Niech K będzie nieznaną płatnościa w chwili 2. Chcemy wyznaczyć K tak, żeby wektory $\mathbf{c} = (20, 10, 0, 0)$ i $\mathbf{d} = (0, 0, K, 2K)$ były równoważne. Najpierw zauważmy, że

$i = 25\%$ odpowiada $v = 0.8$. Wystarczy teraz na przykład porównać wartości obecne obydwu przepływów. Mamy $\ddot{a}(\mathbf{c}) = 20 + 10 \cdot 0.8 = 28$ oraz $\ddot{a}(\mathbf{d}) = K(0.8^2 + 2 \cdot 0.8^3) = 1.664K$. Porównując obydwie wielkości otrzymamy $K = 16.83$, a więc $2K = 33.66$.

Oznaczenie 2. Wprowadzimy teraz wygodną konwencję oznaczeń dla wektorów przepływów. Chwila ostatniej płatności przepływu to N, a więc wektory przepływów są $(N+1)$–wymiarowe, z wyrazami indeksowanymi od 0 do N. Jednakże, będziemy czasami pisać wektor o mniejszej ilości składowych, rozumiejąc, że pozostałe płatności wynoszą 0. Na przykład, jeżeli $N = 8$, to $(1, 3, 2)$ oznacza wektor $(1, 3, 2, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Dla dwóch wektorów przepływów $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$ przez $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ oznaczamy wektor składający się z elementów wektora $\mathbf{c}$, a następnie elementów wektora $\mathbf{d}$. Na przykład, jeżeli $\mathbf{c} = (2, 2)$ oraz $\mathbf{d} = (3, 7, 4, 1)$, to $(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (2, 2, 3, 7, 4, 1, 0, \ldots, 0)$.

Dla dowolnej liczby r i liczby całkowitej k piszemy (r_k) na oznaczenie wektora składającego się z k powtórzeń liczby r. Na przykład $(1_3, 2_5) = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 0, \ldots, 0)$.

Wreszcie, przez $\mathbf{e}^i$ oznaczamy wektor, którego i–tą składową jest 1, a pozostałe składowe są równe 0.

7. Bilans i rezerwa przepływu

Załóżmy, że bierzemy udział w transakcji finansowej reprezentowanej przez wektor przepływów $\mathbf{c}$. W każdej przyszłej chwili k możemy obliczyć dwie podstawowe wielkości. Po pierwsze, chcielibyśmy znać całkowitą wartość zakumulowaną wszystkich poprzednich płatności. Po drugie, chcemy wiedzieć jaka kwotę pieniędzy będziemy potrzebować w chwili k, aby pozbyć się przyszłych zobowiązań z tytułu transakcji.

Przykład 6. Niech $\mathbf{c} = (3, 6, 1, 2, -20)$ oraz $v(0, 1) = 0.6$, $v(1, 2) = 0.5$, $v(2, 3) = 0.4$ i $v(3, 4) = 0.5$. Obliczymy ile mamy, oraz ile wynoszą nasze przyszłe zobowiązania w chwili 2, zaraz przed płatnością 1 PLN.

Nasz majątek w chwili 2 składa się z 3 PLN, które procentowały od chwili 0 do chwili 2 oraz 6 PLN uzyskane w chwili 1, które procentują od chwili 1 do chwili 2. Zatem w chwili 2 mamy

$$3v(2, 0) + 6v(2, 1) = 3v(2, 1)v(1, 0) + 6v(2, 1) = \frac{3}{0.6 \cdot 0.5} + \frac{6}{0.5} = 22.$$

Z drugiej strony mamy do zapłacenia kwotę 20 PLN w chwili 4 i w tym celu musimy mieć w chwili 2 kwotę $20v(2, 4) = 20v(2, 3)v(3, 4) = 4$. Kwotę tą należy pomniejszyć o 1 PLN dostępne w chwili 2 oraz o 2 PLN dostępne w chwili 3 warte $2v(2, 3) = 0.8$. Zatem kwota jakiej potrzebujemy w chwili 2 na pokrycie przyszłych zobowiązań to 2.2 PLN.

Możemy łatwo zweryfikować ten wynik. Załóżmy, że mamy 2.2 PLN tuż przed chwilą 2. W tej chwili dostajemy 1 PLN, a więc mamy 3.2, które po roku zakumuluje do

kwoty $3.2v(3,2) = 3.2/0.4 = 8$ PLN. W chwili 3 dostaniemy 2 PLN, a więc mamy razem 10 PLN, które do chwili 4 zakumuluje do $10v(4,3) = 10/0.5 = 20$ PLN.

Oznaczenie 3. Dla dowolnego danego wektora przepływów $\mathbf{c}$ i chwili k oznaczamy

$$ {}_k\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}, 0, \ldots, 0), \qquad {}^k\mathbf{c} = (0, \ldots, 0, c_k, c_{k+1}, \ldots, c_N), $$

a więc

$$ \mathbf{c} = {}_k\mathbf{c} + {}^k\mathbf{c}. $$

Na przykład, jeżeli $\mathbf{c} = (3, 6, 1, 2, -20)$, to ${}_2\mathbf{c} = (3, 6, 0, 0, 0)$ oraz ${}^2\mathbf{c} = (0, 0, 1, 2, -20)$.

Główny pomysł polega na tym, że ${}_k\mathbf{c}$ reprezentuje przeszłe przepływy do chwili k, a ${}^k\mathbf{c}$ — przyszłe przepływy po chwili k. Zauważmy, że zgodnie z naszą konwencją przepływ c_k jest w chwili k uważany za przyszłość. Zauważmy również, że ${}_0\mathbf{c}$ jest wektorem zerowym, podczas gdy ${}^0\mathbf{c} = \mathbf{c}$.

Definicja 5. Dla $k = 0, 1, \ldots, N$, *bilansem* przepływu $\mathbf{c}$ w chwili k względem funkcji dyskonta v nazywamy wielkość

$$ B_k(\mathbf{c}; v) = \mathrm{Val}_k({}_k\mathbf{c}; v) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j v(k, j). $$

Bilans w chwili k jest to zakumulowana wartość w chwili k wszystkich poprzednich przepływów, i odpowiada na pytanie ile mamy w chwili k. Zauważmy ponownie, że bilans jest obliczony tuż przed dokonaniem płatności c_k, która nie jest włączona do B_k.

Definicja 6. Dla $k = 0, 1, \ldots, N$, *rezerwą* przepływu $\mathbf{c}$ w chwili k względem funkcji dyskonta v nazywamy wielkość

$$ {}_kV(\mathbf{c}; v) = -\mathrm{Val}_k({}^k\mathbf{c}; v) = -\sum_{j=k}^{N} c_j v(k, j). $$

Rezerwa w chwili k jest równa *minus* wartości w chwili k przyszłych płatności, i jest równa kwocie jaką musimy posiadać w chwili k (zarezerwować) aby wypełnić nasze przyszłe zobowiązania z tytułu kontraktu. Ważne jest, aby pamiętać o znaku minus, który podkreśla fakt, że rezerwa to kwota jaką musimy zapłacić, aby zakończyć kontrakt w danej chwili. Oczywiście rezerwa może być ujemna, co oznacza, że aby zakończyć kontrakt powinniśmy otrzymać kwotę równą wartości bezwględnej rezerwy.

Aby wyznaczyć zależność pomiędzy bilansem i rezerwą w chwili k przypomnijmy, że $\mathbf{c} = {}_k\mathbf{c} + {}^k\mathbf{c}$, a więc z liniowości Val_k wynika, że

$$ \mathrm{Val}_k(\mathbf{c}) = B_k(\mathbf{c}) - {}_kV(\mathbf{c}), $$

co oznacza, że wartość kontraktu w każdej chwili jest różnicą pomiędzy kwotą zgromadzona do tej pory a kwotą zarezerwowaną na pokrycie przyszłych zobowiązań. W konsekwencji

$$ \text{dla przepływu } \mathbf{c} \text{ o wartości zero}, \quad B_k(\mathbf{c}) = {}_kV(\mathbf{c}), $$

gdzie przepływ o wartości zero oznacza wektor $\mathbf{c}$ taki, że $\mathrm{Val}_k(\mathbf{c}) = 0$ dla pewnego (a więc dla każdego) k. Z takimi wektorami będziemy miec często do czynienia. Na przykład, jeżeli $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$ są równoważne aktuarialnie, to dla każdej chwili k

$$\mathrm{Val}_k(\mathbf{c} - \mathbf{d}) = \mathrm{Val}_k(\mathbf{c}) - \mathrm{Val}_k(\mathbf{d}) = 0,$$

a więc $\mathbf{c} - \mathbf{d}$ jest wektorem o wartości 0.

8. Wzory rekurencyjne na bilanse i rezerwy

Jeżeli f jest funkcją określoną na zbiorze $0, 1, 2, \ldots$, często jest użyteczne wyprowadzenie wzoru *rekurencyjnego*, który wyraża $f(k+1)$ przez $f(k)$. Gdy dana jest ponadto wartość początkowa $f(0)$, możemy korzystając z tego wzoru wyznaczać kolejne wartości $f(k)$.

W matematyce ubezpieczeń na życie znanych jest bardzo dużo wzorów rekurencyjnych, a większość z nich jest konsekwencją wzorów rekurencyjnych na bilanse i rezerwy, które teraz wyprowadzimy.

Najpierw wyrazimy B_{k+1} przez B_k. Dla dowolnego wektora przepływów $\mathbf{c}$ i chwili k mamy z definicji

$${}_{k+1}\mathbf{c} = {}_k\mathbf{c} + c_k\mathbf{e}^k.$$

Wartość w chwili k pierwszego składnika po prawej stronie wynosi $B_k(\mathbf{c})$, a drugiego po prostu c_k. Korzystając z liniowości Val_k i mnożąc przez $v(k+1, k)$ aby uzyskać wartość w chwili $k+1$ otrzymujemy rekurencję

$$B_{k+1}(\mathbf{c}) = (B_k(\mathbf{c}) + c_k)\, v(k+1, k),$$

z warunkiem początkowym $B_0(\mathbf{c}) = 0$.

W przypadku rezerw zauważamy najpierw, że dla dowolnego wektora $\mathbf{c}$ i dowolnej chwili k mamy

$${}^{k+1}\mathbf{c} = {}^k\mathbf{c} - c_k\mathbf{e}^k,$$

a więc

$${}_{k+1}V(\mathbf{c}) = ({}_kV(\mathbf{c}) + c_k)\, v(k+1, k),$$

z wartością początkową ${}_0V(\mathbf{c}) = -\ddot{a}(\mathbf{c})$.

9. Podział i przesunięcie w czasie

Podamy teraz dwie tożsamości użyteczne w dalszym ciągu.

Korzystając ponownie ze wzoru

$$\mathbf{c} = {}_k\mathbf{c} + {}^k\mathbf{c}$$

oraz $\mathrm{Val}_0({}^k\mathbf{c}) = v(k)\,\mathrm{Val}_k({}^k\mathbf{c})$ otrzymujemy tożsamość

$$\ddot{a}(\mathbf{c}) = \ddot{a}({}_k\mathbf{c}) + v(k)\,\mathrm{Val}_k({}^k\mathbf{c}),$$

zwaną *tożsamością podziału*. Nazwa ta odzwierciedla fakt, że dzięki tej tożsamości obliczanie wartości obecnej można podzielić na dwie części rozważając najpierw przepływy do chwili k, a następnie przepływy po chwili k. Pokażemy teraz, że drugi składnik po rawej stronie można również zapisać przy użyciu symbolu $\ddot{a}$.

Załóżmy, że jesteśmy w chwili k i chcemy rozważyć tę chwilę jako nowa chwilę 0. Dla danego wektora przepływów $\mathbf{c}$ definiujemy wektor przepływów $\mathbf{c} \circ k$ wzorem

$$(\mathbf{c} \circ k)_n = c_{n+k}.$$

Na przykład, jeżeli $\mathbf{c} = (2, 2, 3, 4, 5)$, to $\mathbf{c} \circ 2 = (3, 4, 5)$. Innymi słowy, $\mathbf{c} \circ k$ po prostu zawiera te same przepływy co $\mathbf{c}$ ale od chwili k, lub inaczej $\mathbf{c} \circ k$ jest to ${}^k\mathbf{c}$ z usuniętymi początkowymi zerami. Notacja ta nie była potrzebna w przypadku stałych płatności, gdyż jeżeli $\mathbf{c} = (1_n)$, to $\mathbf{c} \circ k = (1_{n-k})$.

Podobnie, jeżeli dana jest funkcja dyskonta v, to definiujemy nową funkcję dyskonta $v \circ k$ wzorem

$$v \circ k(n, m) = v(n + k, m + k),$$

a więc

$$v \circ k(n) = v(k, k + n).$$

Zauważmy, że jeżeli stopa procentowa jest stała, czyli $v(n, m) = v^{m-n}$, to

$$v \circ k = v,$$

co tłumaczy dlaczego pojęcie *przesunięcia w czasie* nie wystepuje w klasycznej matematyce finansowej.

Mamy teraz

$$\begin{aligned}\mathrm{Val}_k({}^k\mathbf{c}) &= \sum_{i=k}^{N} c_i v(k, i) = \sum_{i=k}^{N} (\mathbf{c} \circ k)_{i-k} (v \circ k)(i - k) \\ &= \sum_{j=0}^{N-k} (\mathbf{c} \circ k)_j (v \circ k)(j) = \ddot{a}(\mathbf{c} \circ k; v \circ k).\end{aligned}$$

Równość ta jest intuicyjnie jasna, gdyż startujemy w chwili k, i chcemy wycenić przyszłe płatności. Możemy teraz zapisać tożsamość podziału w postaci

$$\ddot{a}(\mathbf{c}; v) = \ddot{a}({}_k\mathbf{c}; v) + v(k)\ddot{a}(\mathbf{c} \circ k; v \circ k). \tag{B}$$

Równość ta upraszcza się nieco przy założeniu stałej stopy procentowej

$$\ddot{a}(\mathbf{c}) = \ddot{a}({}_k\mathbf{c}) + v^k \ddot{a}(\mathbf{c} \circ k).$$

Przykład 7. Załóżmy, że $\ddot{a}(\mathbf{c}) = 19.6$ oraz $\ddot{a}({}_{10}\mathbf{c}) = 10$. Ponadto przypuśćmy, że $v(9, 10)$ wzrasta z 0.8 do 0.81, podczas gdy wszystkie inne wartości $v(k, k+1)$ pozostają niezmienione. Jaka jest nowa wartość $\ddot{a}(\mathbf{c})$?

Ze wzoru (B) z $k = 10$ otrzymujemy

$$v(0,9) \cdot 0.8 \cdot \ddot{a}(\mathbf{c} \circ 10; v \circ 10) = 9.6,$$

a więc

$$v(0,9) \cdot 0.81 \cdot \ddot{a}(\mathbf{c} \circ 10; v \circ 10) = 9.72$$

czyli nową wartościa obecną przepływu $\mathbf{c}$ jest 19.72.

10. Standardowe oznaczenia

W standardowych kursach matematyki finansowej używa się zwykle stałej stopy procentowej oraz przepływów pieniądza o regularnej zmienności (stałe, malejące lub rosnące). Porównamy teraz standardowe oznaczenia z naszymi oznaczeniami. Pierwszy przykład to terminowa renta pewna z dołu w wysokości 1 rocznie. Jej obecna wartość jest oznaczana przez

$$a_{\overline{n|}} = \ddot{a}(0, 1_n).$$

Dla renty z góry mamy

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \ddot{a}(1_n).$$

Ponadto, na oznaczenie rent rosnących i malejących z dołu i z góry używa się symboli

$$Ia_{\overline{n|}} = \ddot{a}(0, 1, 2, \ldots, n, 0, \ldots, 0),$$

$$I\ddot{a}_{\overline{n|}} = \ddot{a}(1, 2, \ldots, n, 0, \ldots, 0),$$

$$Da_{\overline{n|}} = \ddot{a}(0, n, n-1, \ldots, 2, 1, 0, \ldots, 0),$$

$$D\ddot{a}_{\overline{n|}} = \ddot{a}(n, n-1, \ldots, 2, 1, 0, \ldots, 0).$$

Dla oznaczenia wartości zakumulowanej używa się litery s. Na przykład

$$s_{\overline{n|}} = \mathrm{Val}_n(0, 1_n) = v(n, 0)a_{\overline{n|}},$$

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = \mathrm{Val}_n(1_n) = v(n, 0)\ddot{a}_{\overline{n|}}.$$