MATEMATYKA UBEZPIECZENIOWA

ZESTAW 2

Zadanie 1. Zapisać słownie oraz przy użyciu odpowiednich prawdopodobieństwo dla zmiennych losowych T_x dla odpowiedniego x znaczenie symboli:

(a) p_{47} i q_{47};

(b) ${}_5p_{32}$ i ${}_5q_{32}$

(c) ${}_{5|5}q_{80}$;

(d) ${}_3p_{[79]+4}$ i ${}_3q_{[79]+4}$.

(e) $p_{[57]+3}$ i $q_{[57]+3}$

Zadanie 2. Zapisać przy użyciu odpowiednich symboli aktuarialnych prawdopodobieństwo tego, że:

(a) osoba 68–letnia umrze przed 75 rokiem życia;

(b) osoba 48–letnia dożyje 70 roku życia;

(c) osoba 74–letnia dożyje 85 roku życia pod warunkiem, że dożyje ona 80 lat;

(d) osoba 49–letnia umrze pomiędzy 67 a 78 rokiem życia;

(e) osoba 54–letnia umrze pomiędzy 65 a 70 rokiem życia pod warunkiem, że dożyje 65 roku życia;

(f) osoba 90–letnia przeżyje następny rok.

Zadanie 3. Zapisać słownie oraz przy użyciu odpowiednich symboli aktuarialnych następujące prawdopodobieństwa:

(a) $\mathrm{P}(T_{34} > 12)$;

(b) $\mathrm{P}(T_{57} > 14 \mid T_{57} > 9)$;

(c) $\mathrm{P}(4 \leqslant T_{77} \leqslant 11)$;

(d) $\mathrm{P}(T_{63} \leqslant 12 \mid T_{63} > 3)$;

(e) $\mathrm{P}(T_{63} \leqslant 2 \mid T_{63} > 1)$.

Zadanie 4. Uzasadnić, że

$$ {}_2p_{50} = p_{50}p_{[50]+1} $$

oraz

$$ {}_3p_{50} = p_{50}p_{[50]+1}p_{[50]+2}. $$

Zadanie 5. Udowodnić, że zachodzą następujące równości

$$ {}_{s+t}p_x = {}_sp_x \, {}_tp_{[x]+s} $$

$$ {}_{s|t}q_x = {}_sp_x \, {}_tq_{[x]+s}, $$

a więc

$$ {}_kp_x = p_x \prod_{i=1}^{k-1} p_{[x]+i}. $$

Zadanie 6. Załóżmy, że dla dowolnych $x, t, s \geqslant 0$ zachodzi równość

$$ {}_tp_{[x]+s} = {}_tp_{x+s} \tag{HJP} $$

oraz, że znane są wszystkie prawdopodobieństwa p_x dla $x = 1, 2, \ldots$. Obliczyć

(a) ${}_4p_{67}$;
(b) ${}_{10}q_{58}$;
(c) ${}_{7|7}q_{39}$.

Zadanie 7. Przy założeniach poprzedniego zadania przypuśćmy, że dane są również prawdopodobieństwa ${}_up_x$ dla $x = 0, 1, 2, \ldots$ oraz $u \in (0, 1)$. Obliczyć:

(a) $\mathrm{P}(T_{30} > 10.5)$;
(b) prawdopodobieństwo tego, że 30-latek będzie jeszcze żył dłużej niż 10 lat i umrze przed okresem 11.5 lat;
(c) ${}_{0.75|0.75}q_{30}$;
(d) $\mathrm{P}(T_{30.5} > 10)$;
(e) prawdopodobieństwo tego, że osoba która ma 56 lat i 4 miesiące przeżyje kolejne 4 miesiące.

Zadanie 8. Obliczyć ${}_{17}p_{19}$ oraz ${}_{15|13}q_{36}$, jeżeli spełniony jest warunek HJP oraz

$$ s(x) = \frac{\sqrt{100 - x}}{10}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 100. $$

Zadanie 9. Pokazać, że jedynym rozkładem o stałym natężeniu śmiertelności jest rozkład wykładniczy.

Zadanie 10. Przyszły czas życia osoby nowo urodzonej ma rozkład wykładniczy z parametrem 0.01. Obliczyć:

(a) prawdopodobieństwo śmierci nie później niż w 45 roku życia;
(b) prawdopodobieństwo dożycia 80 lat;
(c) prawdopodobieństwo śmierci między 45 a 80 rokiem życia.

Zadanie 11. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej K_x i obliczyć e_x, jeżeli T_x ma rozkład wykładniczy.

Zadanie 12. Wyznaczyć wzory na funkcję przeżycia $s(t)$ oraz ${}_tp_x$ dla rozkładów de Moivre'a, Gompertza, Makehama i Weibulla.

Zadanie 13. Wyznaczyć $\mathring{e}_x$ w modelu Weibulla z parametrem $n = 1$.

Zadanie 14. Udowodnić, że przy założeniu HJP
$$\frac{d({}_tp_x)}{dx} = {}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t}).$$

Zadanie 15. W populacji A natężenie zgonów dane jest wzorem
$$\mu_x^A = \frac{1}{100-x}, \quad x < 100,$$
a w populacji B
$$\mu_x^B = \frac{n}{100-x}, \quad x < 100,$$
gdzie n jest parametrem. Obliczyć n jeżeli wiadomo, że osobniki z populacji A mają przed sobą przeciętnie o 10% więcej życia niż osobniki z B w tym samym wieku.

Zadanie 16. W pewnej populacji śmiertelnością rządziło prawo de Moivre'a z wiekiem granicznym ω. Obecnie po 500 latach sytuacja w tej populacji pogorszyła się i natężenie zgonów wzrosło około 2000 razy, przy tym samym wieku granicznym. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo, że x-latek dożyje co najmniej oczekiwanego wieku $x + \mathring{e}_x$?

Zadanie 17. Natężenie zgonów opisuje funkcja $\mu_t = t/100$. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że osoba w wieku 15 lat umrze między 35 a 45 rokiem życia.

Zadanie 18. W danej populacji śmiertelnością rządzi prawo de Moivre'a z wiekiem granicznym ω. O wieku x wiadomo, że x-latki umierają w ciągu doby dwa razy rzadziej niż osoby w wieku $2x$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x dożyje wieku $2x$.

Zadanie 19. Obliczyć p_{10}, p_{20}, p_{30} i p_{40} jeśli rozkład trwania życia noworodka podlega prawu Gompertza z $B = 0.00026155$ i $c = 1.07826$.

Zadanie 20. Niech $\mu_{20} = 0.0056044$ oraz $\mu_{30} = 0.0132678$ i T_0 ma rozkład Gompertza. Obliczyć ${}_{10}p_{25}$.

Zadanie 21. Wyznaczyć prawdopodobieństwo przeżycia przez osobę 55-letnią co najmniej 10 lat, jeżeli analogiczne prawdopodobieństwo dla osoby 25-letniej wynosi 0.8 oraz natężenie śmiertelności opisuje funkcja $\mu_x = kx$ dla pewnego $k > 0$.

Zadanie 22. Znaleźć l_x, jeżeli $l_0 = 1000$ oraz

(a) $\mu_t = at$;

(b) $\mu_t = \frac{1}{(a_0+a_1t)(b_0+b_1t)}$.