ROZDZIAŁ 8

# Dalsze zagadnienia

## 1. Ubezpieczenia grupowe

Do tej pory rozważaliśmy ubezpieczenia na życie związane z życiem jednej osoby. Teraz rozważymy ubezpieczenia na życie związane z życiem kilku osób. Podkreślmy, że chodzi tu o pojedynczą umowę obejmującą kilka związanych ze sobą osób.

Załóżmy, że dana jest pewna grupa $m$ osób w wieku odpowiednio $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Oczywiście zakładamy, że w chwili zawierania umowy wszystkie te osoby żyją. W takich umowach ubezpiecza się pewien stan grupy, czyli tzw. **status** grupy. Najprostsze przykłady to **status wspólnego życia** i **status ostatniego żyjącego** osobnika z grupy.

Status wspólnego życia zaczyna się w chwili zawarcia umowy i trwa do momentu, gdy wszystkie osoby z danej grupy żyją. Inaczej mówiąc status ten wygasa, w chwili pierwszej śmierci w danej grupie.

Status ostaniego żyjącego również zaczyna się w chwili zawarcia umowy i wygasa w chwili śmierci ostatniej osoby z danej grupy.

**1.1. Oznaczenia.** Niech $u$ oznacza status grupy związany z daną umową i niech $T = T(u)$ oznacza czas jego trwania. Podobnie jak dla pojedynczego życia określamy

- ${}_tp_u$ – prawdopodobieństwo, że grupa jest w stanie $u$ w chwili $t$;
- ${}_tq_u$ – prawdopodobieństwo, że grupa status $u$ wygaśnie (tzn. zakończy się) przed chwilą $t$, oczywiście ${}_tq_u = 1 - {}_tp_u$;
- ${}_tp_{u+s}$ – prawdopodobieństwo trwania w statusie $u$ przez kolejne $t$ lat, jeżeli status ten trwa już $s$ lat, oczywiście $u + s$ jest tylko oznaczeniem i nie ma żadnego sensu algebraicznego. Mamy

$$ {}_tp_{u+s} = P(T(u) > t + s \mid T(u) > s) = \frac{{}_{t+s}p_u}{{}_tp_u}. $$

- ${}_tq_{u+s}$ – prawdopodobieństwo wygaśnięcia statusu $u$ w ciągu kolejnych $t$ lat, jeżeli status ten trwa już $s$ lat,
- $K(u) = \lfloor T(u) \rfloor$, $\mathring{e}_u = ET(u)$ oraz $e_u = EK(u)$ itp.

**1.2. Status wspólnego życia.** Niech $T_k = T(x_k)$ dla $k = 1, 2, \ldots, m$ i załóżmy, że $T_1, \ldots, T_m$ są niezależne, tzn. czasy przyszłego życia dla poszczególnych osób w grupie nie zależą od siebie. Ponadto niech

$$a \wedge b = \min(a, b)$$

oznacza mniejszą z liczb $a$ i $b$. Status wspólnego życia

$$u = x_1 : x_2 : \ldots : x_m$$

trwa do momentu

$$T(u) = T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_m = \min(T_1, T_2, \ldots, T_m).$$

Niech

$${}_tp_{x_1:x_2:\ldots:x_m}$$

oznacza prawdopodobieństwo trwania w statusie wspólnego życia w chwili $t$.

Twierdzenie 12. *Jeżeli $T_1, \ldots, T_m$ są niezależne, to*

$${}_tp_{x_1:\ldots:x_m} = \prod_{k=1}^{m} {}_tp_{x_k} = {}_tp_{x_1}{}_tp_{x_2} \cdots {}_tp_{x_m}.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} {}_tp_{x_1:x_2:\ldots:x_m} &= P(T(u) > t) \\ &= P(T_1 > t, T_2 > t, \ldots, T_m > t) \\ &= P(T_1 > t)P(T_2 > t)\ldots P(T_m > t) \\ &= {}_tp_{x_1}{}_tp_{x_2} \cdots {}_tp_{x_m}. \end{aligned}$$

□

Zatem przy założeniu niezależności możemy wyznaczać prawdopodobieństwa statusu wspólnego życia przy użyciu tablic trwania życia. Ponadto przy założeniu hipotezy jednorodnej populacji HJP mamy

$${}_tp_{(x_1:x_2:\ldots:x_m)+s} = {}_tp_{x_1+s:x_2+s:\ldots:x_m+s},$$

a więc

$$q_{(x_1:x_2:\ldots:x_m)+k} = q_{x_1+k:x_2+k:\ldots:x_m+k}.$$

W szczególności dla $m = 2$ mamy

$${}_tp_{x:y} = {}_tp_x\, {}_tp_y,$$

oraz

$$q_{x:y} = 1 - p_{x:y} = 1 - p_x p_y = 1 - (1 - q_x)(1 - q_y).$$

Niech $A_u$ oznacza jednorazową składkę netto w ubezpieczeniu statusu $u$ na sumę 1. Oznacza to, że ubezpieczyciel zobowiązuje się do wypłaty kwoty 1 na koniec roku, w którym wygasł status $u$. Podobnie niech $\ddot{a}_u$ oznacza wartość aktuarialną renty płaconej w wysokości 1 rocznie, aż do momentu wygaśnięcia statusu $u$ i niech $P_u$ oznacza wysokość rocznej składki netto w ubezpieczeniu statusu $u$. Oczywiście

$$P_u = \frac{A_u}{\ddot{a}_u}.$$

W szczególności, jeżeli $u = x_1 : \ldots : x_m$, to

$$A_{x_1:\ldots:x_m} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_{x_1:x_2:\ldots:x_m} q_{x_1+k:x_2+k:\ldots:x_m+k}$$

oraz

$$\ddot{a}_{x_1:\ldots:x_m} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_{x_1:x_2:\ldots:x_m}$$

Na przykład

$$A_{x:y} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_{x:y} q_{x+k:y+k}$$

oraz

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:y} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x \, {}_k p_y \\ &= 1 + v p_x p_y + v^2 {}_2 p_x {}_2 p_y + \ldots\end{aligned}$$

Ponadto zauważmy, że jeżeli przez $\overline{n}|$ oznaczymy status, który wygasa w chwili $n$, to symbole wprowadzone dla ubezpieczenia na życie i dożycie $A_{x:\overline{n}|}$ i renty życiowej czasowej $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ są zgodne z powyższymi oznaczeniami. Mianowicie oznaczenia te dotyczą statusu wspólnego życia grupy składającej się z ubezpieczonego $x$-latka i "wirtualnej" osoby, której przyszły czas życia wynosi $n$.

**1.3. Status ostatniego przeżywającego.** Status ostatniego przeżywającego

$$u = \overline{x_1 : \ldots : x_m},$$

trwa dopóki żyje co najmniej jeden z członków grupy. Zatem jego przyszły czas trwania wynosi

$$T(u) = \max(T_1, \ldots, T_m).$$

Będziemy dla uproszczenia rozważać tylko przypadek $m = 2$ lub $m = 3$

W celu obliczenia prawdopodobieństw związanych z takim statusem przypomnijmy tzw. zasadę włączeń i wyłączeń.

Niech $B_1$, $B_2$ i $B_3$ będą dowolnym zdarzeniami. Wtedy

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2)$$

oraz

$$\begin{aligned}P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) &= P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) \\ &\quad - P(B_1 \cap B_2) - P(B_1 \cap B_3) - P(B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3).\end{aligned}$$

Jeżeli teraz przyjmiemy $B_i = [T_i > k]$, to $P(B_i) = {}_kp_{x_i}$, a więc

$$ {}_kp_{\overline{x_1:x_2}} = {}_kp_{x_1} + {}_kp_{x_2} - {}_kp_{x_1:x_2} $$

oraz podobnie

$$ {}_kp_{\overline{x_1:x_2:x_3}} = {}_kp_{x_1} + {}_kp_{x_2} + {}_kp_{x_3} - {}_kp_{x_1:x_2} - {}_kp_{x_1:x_3} - {}_kp_{x_2:x_3} + {}_kp_{x_1:x_2:x_3} $$

Mnożąc stronami przez $v_k$ i sumując otrzymamy wzór na OWA renty wypłacanej aż do ostatniej śmierci w grupie

$$ \ddot{a}_{\overline{x_1:x_2}} = \ddot{a}_{x_1} + \ddot{a}_{x_2} - \ddot{a}_{x_1:x_2} $$

oraz

$$ \ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:x_3}} = \ddot{a}_{x_1} + \ddot{a}_{x_2} + \ddot{a}_{x_3} - \ddot{a}_{x_1:x_2} - \ddot{a}_{x_1:x_3} - \ddot{a}_{x_2:x_3} + \ddot{a}_{x_1:x_2:x_3}. $$

**1.4. Emerytury małżeńskie i renty wdowie.** Emeryturą małżeńską nazywamy następujące świadczenie: Mężowi i żonie, obecnie w wieku $x$ i $y$ wypłaca się rentę życiową z rocznymi płatnościami w wysokości $A$, aż do pierwszej śmierci, a potem w wysokości $B$ co rok – owdowiałej osobie, aż do jej śmierci.

Jednorazowa składka netto takiej renty wynosi

$$ (A - B)\ddot{a}_{x:y} + B\ddot{a}_{\overline{x:y}}. $$

Zauważmy, że ponadto

$$ \ddot{a}_{x:y} + \ddot{a}_{\overline{x:y}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y. $$

W przypadku emerytury małżeńskiej kolejność umierania małżonków nie jest istotna, a więc jest to tzw. świadczenie symetryczne.

Rentą wdowią nazywamy następujące świadczenie: żonie co rok wypłacana jest kwota $C$ począwszy od śmierci męża, aż do śmierci żony. W tym przypadku kolejność umierania jest istotna: jeżeli żona umrze pierwsza, to żadne świadczenie nie będzie wypłacane. Niech $x$ oznacza obecny wiek męża, a $y$ – obecny wiek żony. Jeżeli $C = 1$, to OWA takiego świadczenia oznaczamy symbolem $\ddot{a}_{x|y}$. Mamy

$$ \ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x:y}. $$

## 2. Ubezpieczenia wieloopcyjne

Wypłatę świadczenia można powiązać nie tylko ze śmiercią ubezpieczonego, ale również z innymi zdarzeniami, jak np. nieszczęśliwy wypadek czy kalectwo. Każda z tych sytuacji powoduje niezdolność ubezpieczonego do dalszej pracy zarobkowej, a więc podobnie jak śmierć – może powodować pogorszenie sytuacji majątkowej reszty rodziny.

Można również rozróżniać przyczyny śmierci. Na przykład w polisie może być zawarty zapis, że śmierć z powodu wypadku powoduje dwa razy większe świadczenie niż, śmierć z innych powodów.

W powyższych przypadkach mówimy o tzw. **ubezpieczeniach wieloopcyjnych**. Ubezpieczenie takie dotyczy jednego $x$-latka, ale z uwzględnieniem różnych zdarzeń losowych w jego życiu, szczegółowo opisanych w umowie, zwanych **opcjami** lub **ryzykami**, które będziemy numerować od 1 do $n$.

Dla danego $x$-latka $T(x)$ oznaczać będzie czas od zawarcia umowy do chwili zajścia jednej z opcji. Mówimy również czasami o czasie wyjścia ubezpieczonego z obecnego statusu. Ponadto będziemy rozważać zmienną losową $J(x)$, opisującą która z opcji zaszła. Na przykład, załóżmy, że w przypadku pozostania przy życiu, ale utracie zdolności do pracy $J(x) = 1$ oraz w przypadku śmierci $J(x) = 2$. Wtedy $T(25) = 22$, $J(25) = 1$ oznacza zdarzenie: osoba, która kupiła polisę w wieku 25 lat, utraciła zdolność do pracy w wieku 47 lat, pozostając przy życiu.

**2.1. Oznaczenia.** Załóżmy, że mamy $m$ rodzajów szkód, które numerujemy liczbami od 1 do $m$. Są to możliwe wartości zmiennej losowej $J = J(x)$. Załóżmy, że dla wszystkich $t \geqslant 0$ i $j = 1, \ldots, m$, znane są prawdopodobieństwa

$$_tq_x^{(j)} = \mathrm{P}(T < t, J = j),$$

czyli prawdopodobieństwa wyjścia ze statusu do chwili $t$ z powodu $j$. Niech

$$g_j(t) = \frac{d}{dx}{}_tq_x^{(j)}$$

oznacza gęstość rozkładu $T$ dla danego $j$. Wtedy

- $_tq_x^{(\tau)} = \mathrm{P}(T < t)$ oznacza prawdopodobieństwo wyjścia ze statusu przed chwilą $t$ (obojętnie z jakiej przyczyny); oczywiście
$$_tq_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)};$$
- $_tp_x^{(\tau)} = 1 - {}_tq_x^{(\tau)}$ oznacza prawdopodobieństwo pozostania w statusie przez czas $t$.
- $g(t) = \frac{d}{dx}{}_tq_x^{(\tau)}$ oznacza gęstość rozkładu zmiennej losowej $T$, oczywiście
$$g(t) = \frac{d}{dx}{}_tq_x^{(\tau)} = \frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)} = \sum_{j=1}^{m} g_j(t).$$

Zauważmy, że nie używamy oznaczenia $_tp_x^{(j)}$, gdyż powinno ono być równe $1 - {}_tq_x^{(j)}$, ale to oznaczałoby, że jest to prawdopodobieństwo, że ubezpieczony nie ulegnie szkodzie $j$ do chwili $t$ lub ulegnie wcześniej innej szkodzie.

**2.2. Natężenie wymierania.** Podobnie jak poprzednio określamy natężenie wymierania $x$-latka w chwili $t$ wzorem

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dx}{}_tq_x^{(\tau)} = \frac{g(t)}{_tp_x^{(\tau)}}.$$

Analogicznie określamy natężenie wymierania z powodu $j$ wzorem

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dx} {}_tq_x^{(j)},$$

a więc na mocy powyższej zależności pomiędzy gęstościami

$$\mu_{x+t} = \sum_{j=1}^{m} \mu_{x+t}^{(j)}.$$

Zauważmy, że

$$g_j(t) = {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)}$$

oraz

$$P(J = j \mid T = t) = \frac{g_j(t)}{g(t)} = \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}}.$$

**2.3. Tablice szkodowości.** Tablice szkodowości dla każdego $x = 0, 1, 2, \ldots$, podają następujące wartości:

- $l_x$, czyli liczbę osób, które dotrwały w statusie do wieku $x$;
- $d_x^{(1)}, \ldots, d_x^{(m)}$, gdzie $d_x^{(m)}$ oznacza liczbę osób, które wyszły ze statusu w wieku $x$ z przyczyny $j$.

Oczywiście

$$d_x^{(1)} + \ldots + d_x^{(m)} = l_x - l_{x+1}.$$

Podobnie jak dla zwykłych tablic trwania życia

$$p_x^{(\tau)} = {}_1p_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$q_x^{(\tau)} = 1 - p_x^{(\tau)} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

oraz

$$q_x^{(j)} = \frac{d_x^{(j)}}{l_x}.$$

Przez $K = K(x)$ oznaczamy obcięty czas wyjścia ze statusu, a więc $K = \lfloor T \rfloor$. Podobnie jak w modelu jednoopcyjnym

$$\mathrm{P}(K = k, J = j) = {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)},$$

gdzie

$${}_kp_x^{(\tau)} = p_x^{(\tau)} p_{x+1}^{(\tau)} \ldots p_{x+k-1}^{(\tau)}.$$

Zatem korzystając z tablic szkodowości mamy

$${}_kp_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+k}}{l_x},$$

oraz

$$\mathrm{P}(K = k, J = j) = \frac{d_{x+k}^{(j)}}{l_x}.$$

**2.4. Przykłady ubezpieczeń wieloopcyjnych.** Rozważmy ubezpieczenie, które gwarantuje wypłatę w wysokości $c_{j,k+1}$ na koniec roku $k$ nastąpiło wyjście ze statusu z powodu opcji $j$. Obecna wartość tego świadczenia wynosi

$$Z = c_{J,K+1} v^{K+1},$$

a więc JSN wynosi

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k+1} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)}.$$

Na przykład w ubezpieczeniu, które daje wypłatę 1 na koniec roku wyjścia ze statusu z powodu 1, oraz 2 jeżeli wyjście nastąpiło z powodu opcji 2, JSN wynosi

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(2)}.$$

Dla ubezpieczeń płatnych w chwili wyjścia ze statusu z powodu $j$ w wysokości $c(j,t)$ mamy

$$Z = c(J,T) v^T,$$

a więc JSN wynosi

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} v^t {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} \, dt.$$