ROZDZIAŁ 6

Składki i rezerwy netto

1. Składki netto

Umowę pomiędzy ubezpieczycielem a ubezpieczonym dotyczącą ubezpieczenia na życie nazywa się **polisą ubezpieczeniową**. Polisa taka zawiera szczegółowe warunki ubezpieczenia takie jak: suma ubezpieczenia, okres ważności ubezpieczenia, chwila wypłaty i ilość rat wypłaty. Z drugiej strony musi ona zawierać warunki płatności składki w danym ubezpieczeniu. Możliwe są trzy sposoby opłacenia składki:

1. pojedyncza składka, płacona jednorazowo;
2. okresowa składka płacona w ratach stałej wielkości;
3. okresowa składka płacona w ratach zmiennej wielkości.

Dla składek okresowych należy wyszczególnić częstość płacenia (np. rocznie, miesięcznie itp.) oraz ich wysokość. Z reguły składki są pobierane z góry, czyli na początku każdego okresu. Przy pobieraniu składek z góry, ubezpieczony będzie obawiał się utraty ewentualnego świadczenia, w razie zaprzestania płacenia składek. Gdyby składki były pobierane z dołu, to mogłoby się zdarzyć tak, że termin płatności kolejnej raty składki wypadłby po wypłacie świadczenia.

Jednorazowe składki netto w różnych typach ubezpieczeń na życie omówiliśmy już poprzednio. Teraz zajmiemy się wyznaczeniem wysokości okresowych składek netto. W tym celu dla danej polisy określamy wielkość **całkowitą stratę** L jako różnicę pomiędzy obecną wartością świadczenia gwarantowanego przez tę polisę, a obecną wartością przyszłych składek wpłaconych przez ubezpieczonego. Oczywiście L jest zmienną losową, która może przyjmować wartości zarówno dodatnie jak i ujemne. Zauważmy, że dodatnie wartości zmiennej L oznaczają, że ubezpieczyciel wypłaci więcej niż zebrał w postaci składek, a więc faktycznie poniesie stratę. Natomiast ujemne wartości L oznaczają, że ubezpieczyciel na danej polisie zyska.

Składkę w danej polisie nazywamy **składką netto**, jeżeli spełnia ona **warunek równoważności**

$$E(L) = 0,$$

tzn. wartość oczekiwana całkowitej straty wynosi 0.

Zauważmy, że jednorazowe składki netto wyprowadzone poprzednio spełniają warunek równoważności, gdyż dla danego typu ubezpieczenia JSN wynosi $A = E(Z)$, gdzie Z jest obecną wartością przyszłego świadczenia. Zatem $L = Z - A$, a więc $E(L) = E(Z - A) = E(Z) - A = 0$.

W dalszym ciągu wyznaczymy wysokość składek okresowych o stałej wysokości w poszczególnych typach ubezpieczeń płatnych na koniec roku śmierci. Wysokość pojedynczej składki (tzn. jednej raty składki) będziemy oznaczać literą P z odpowiednimi indeksami. Na przykład jednorazową składkę netto w ubezpieczeniu terminowym x-latka na n lat oznaczyliśmy symbolem $A^1_{x:\overline{n}|}$, a więc wysokość każdej raty okresowej składki oznaczymy symbolem $P^1_{x:\overline{n}|}$. Rozważmy najpierw przykład ilustrujący ogólną metodę wyznaczania składek.

Przykład 15. Rozważmy ubezpieczenie terminowe dla 40-latka na 10 lat na sumę C, płatną jednorazowo na koniec roku śmierci ubezpieczonego. Ubezpieczony ma opłacać składkę w wysokości Π corocznie z góry, dopóki żyje, ale nie dłużej niż 10 lat.

Niech K oznacza obcięty przyszły czas życia 40-latka. Obecna wartość świadczenia w ubezpieczeniu terminowym na 10 lat na sumę C wynosi

$$Z = C\,v^{K+1}\mathbf{1}(K < 10) = \begin{cases} C\,v^{K+1}, & \text{jeżeli } K = 0, 1, \ldots, 9 \\ 0, & \text{jeżeli } K \geqslant 10. \end{cases}$$

Z drugiej strony obecna wartość składek które wpłaci ubezpieczony wynosi

$$Y = \begin{cases} \Pi\,\ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{jeżeli } K = 0, 1, \ldots, 9, \\ \Pi\,\ddot{a}_{\overline{10}|}, & \text{jeżeli } K \geqslant 10. \end{cases}$$

Zatem strata ubezpieczyciela wynosi

$$L = \begin{cases} C\,v^{K+1} - \Pi\,\ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{jeżeli } K = 0, 1, \ldots, 9, \\ -\Pi\,\ddot{a}_{\overline{10}|}, & \text{jeżeli } K \geqslant 10. \end{cases}$$

Skoro ma zachodzić $E(L) = 0$, to musi zachodzić

$$C\,A^1_{40:\overline{10}|} - \Pi\,\ddot{a}_{40:\overline{10}|} = 0,$$

a więc

$$\Pi = C\,\frac{A^1_{40:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}}.$$

Załóżmy teraz na przykład, że $i = 4\%$ oraz przyszły czas życia jest zadany rozkładem de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$. Wtedy K ma rozkład jednostajny na zbiorze $\{40, 41, \ldots, 99\}$, a więc

$$\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{60}, \quad \text{dla } k = 40, 41, \ldots, 99.$$

Korzystając z odpowiednich wzorów otrzymujemy

$$A^1_{40:\overline{10}|} = \sum_{k=0}^{9} v^{k+1}\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{60}\left(v + v^2 + \ldots + v^{10}\right) = 0.1352,$$

oraz

$$A_{40:\overline{10|}}^{\,1} = v^{10}\mathrm{P}(K \geqslant 10) = \frac{5}{6}v^{10} = 0.5630.$$

Zatem

$$A_{40:\overline{10|}} = A^{1}_{40:\overline{10|}} + A_{40:\overline{10|}}^{\,1} = 0.6982$$

oraz

$$\ddot{a}_{40:\overline{10|}} = \frac{1 - A_{40:\overline{10|}}}{d} = 7.8476.$$

Ostatecznie wysokość okresowej składki wynosi

$$\Pi = 0.0172\,C.$$

Zauważmy, że podobnie jak dla jednorazowych składek netto, wysokość składki jest proporcjonalna do sumy ubezpieczenia, a więc wystarczy wyznaczać wysokość składek dla ubezpieczeń na sumę 1.

1.1. Ubezpieczenie na całe życie. Rozważmy najpierw ubezpieczenie x-latka na całe życie na sumę 1, płatną na koniec roku śmierci. Ubezpieczenie to ma być opłacone okresową składką płatną co roku z góry w wysokości P_x. W dalszym ciągu piszemy K zamiast K_x. Strata ubezpieczyciela wynosi

$$L = v^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K+1|}}.$$

Z warunku równoważności dostajemy równość

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

Przypomnijmy, że

$$\ddot{a}_{\overline{K+1|}} = \frac{1 - v^{K+1}}{d},$$

a więc

$$L = \left(1 + \frac{P_x}{d}\right) v^{K+1} - \frac{P_x}{d}.$$

Zatem

$$\mathrm{Var}(L) = \left(1 + \frac{P_x}{d}\right)^2 \mathrm{Var}(v^{K+1}),$$

co oznacza, że w przypadku pobierania składki rocznej ubezpieczyciel ponosi większe ryzyko niż w przypadku pobierania składki jednorazowo.

1.2. Ubezpieczenie terminowe. Wysokość rocznej składki netto w ubezpieczeniu x-latka, terminowym na n lat, płatnym na koniec roku śmierci, oznaczamy przez $P^1_{x:\overline{n}|}$. Strata ubezpieczyciela wynosi

$$L = \begin{cases} v^{K+1} - P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{jeżeli } K = 0, 1, \dots, n-1, \\ -P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{jeżeli } K \geqslant n. \end{cases}$$

Zatem

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

1.3. Ubezpieczenie na dożycie. Oznaczmy przez $P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$ wysokość rocznej składki netto w ubezpieczeniu x-latka na dożycie na n lat na sumę 1. Strata ubezpieczyciela w takim ubezpieczeniu wynosi

$$L = \begin{cases} -P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{jeżeli } K = 0, 1, \dots, n-1, \\ v^n - P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{jeżeli } K \geqslant n. \end{cases}$$

Zatem

$$P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

1.4. Ubezpieczenie na życie i dożycie. Oznaczmy przez $P_{x:\overline{n}|}$ wysokość rocznej składki netto w ubezpieczeniu x-latka na życie i dożycie na n lat na sumę 1. Podobnie jak wyżej pokazujemy, że

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

Dla jednorazowej składki w takim ubezpieczeniu mamy

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1},$$

a więc

$$P_{x:\overline{n}|} = P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}.$$

1.5. Funkcje komutacyjne. Ze wzorów na jednorazowe składki netto oraz wartości aktuarialne rent życiowych w terminach funkcji komutacyjnych dostajemy następujące wzory na okresowe składki netto

$$P_x = \frac{M_x}{N_x},$$

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}},$$

$$P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}},$$

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

1.6. Składki płatne częściej niż raz do roku. Rozważmy teraz przypadek, gdy składki nie są płacone co roku, ale częściej, tzn. m razy w ciągu roku. Wtedy do odpowiedniego symbolu składki dodajemy górny indeks (m). Wzory na składki

$$P_x^{(m)}, \quad P_{x:\overline{n}|}^{(m)}, \quad P^1_{x:\overline{n}|}{}^{(m)}, \quad P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}{}^{(m)}$$

otrzymujemy ze wzorów na składki P_x, $P_{x:\overline{n}|}$, $P^1_{x:\overline{n}|}$ i $P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$ przez zastąpienie $\ddot{a}_x$ przez $\ddot{a}_x^{(m)}$ oraz $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ przez $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$. Na przykład roczna składka w ubezpieczeniu na dożycie na n lat przy płatności m razy w roku wynosi

$$P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}{}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}}.$$

Zatem na początku każdego okresu ubezpieczony musi wpłacić sumę $\frac{1}{m}\, P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}{}^{(m)}$.

Zauważmy, że na przykład $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} < \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, a więc $P_{x:\overline{n}|} < P_{x:\overline{n}|}^{(m)}$. Zatem ubezpieczonemu bardziej opłaca się opłacać składkę raz do roku niż częściej. Przy opłatach m-krotnych, ubezpieczony będzie musiał zapłacić więcej w ciągu każdego roku.

1.7. Składki w ubezpieczeniach płatnych w chwili śmierci. Rozważmy następującą polisę ubezpieczeniową: x-latek ubezpiecza się na całe życie na sumę 1 płatną w chwili śmierci. Składka opłacana jest rentą dożywotnią coroczną z góry w wysokości $P(\bar{A}_x)$. Oznaczmy dla uproszczenia $T = T_x$ i $K = K_x$. Strata ubezpieczyciela wynosi

$$L = v^T - P(\bar{A}_x)\, \ddot{a}_{\overline{K+1}|},$$

a więc

$$P(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}.$$

Podobnie, jeżeli składka opłacana jest w postaci m rat, to roczna składka wynosi

$$P^{(m)}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}.$$

Oczywiście wysokość każdej raty wynosi $\frac{1}{m}P^{(m)}(\bar{A}_x)$.

Analogicznie można pokazać, że

$$P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}};$$

$$P(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

Uwaga. $\bar{P}(\bar{A}_x)$ oznacza wysokość rocznej składki w ubezpieczeniu na całe życie płatnym w chwili śmierci, przy czym składki są płacone w sposób **ciągły**. Podobne znaczenie ma $\bar{P}$ w symbolach $\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})$ i $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$.

1.8. Składki płatne przez okres krótszy niż okres ubezpieczenia. Rozważmy na koniec następującą polisę: x-latek ubezpiecza się na całe życie na sumę 1, płatną na koniec roku śmierci. Składka opłacana jest okresowo co roku z góry, ale przez co najwyżej h lat. Wysokość takiej składki oznaczymy przez ${}_hP_x$.

Zauważmy, że strata ubezpieczyciela wynosi

$$L = \begin{cases} v^{K+1} - {}_hP_x\, \ddot{a}_{\overline{K+1|}}, & \text{jeżeli } K = 0, 1, \ldots, h-1, \\ v^{K+1} - {}_hP_x\, \ddot{a}_{\overline{h|}}, & \text{jeżeli } K \geqslant h. \end{cases}$$

Zatem z zasady równoważności

$${}_hP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}}.$$

Analogicznie wyprowadzamy następujące wzory, prawdziwe dla $h = 1, 2, \ldots, n$

$${}_hP^1_{x:\overline{n|}} = \frac{A^1_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}};$$

$${}_hP_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}};$$

$${}_hP_{x:\overline{n|}} = \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}}.$$

2. Rezerwy składek netto

Rozważmy pewną polisę ubezpieczeniową na życie, która będzie opłacana okresową składką. W chwili wystawienia polisy oczekiwana wartość obecna przyszłych świadczeń z tej polisy jest równa obecnej wartości oczekiwanej przyszłych składek. Dzięki temu oczekiwana strata ubezpieczyciela L jest równa 0.

Równość taka w ogólności nie musi zachodzić w trakcie obowiązywania polisy. Najlepszym przykładem tego zjawiska jest umowa ubezpieczenia na całe życie opłacona jednorazową składką netto. Cały strumień składki przypada więc na chwilę 0, a całość wypłaty ogranicza się do jednej kwoty, ale płatnej na koniec trwania umowy. Zatem po chwili 0 OWA przyszłych składek równa się 0, a OWA przyszłych świadczeń jest dodatnia.

Dla pewnej polisy na życie dla x-latka, określmy zmienną losową ${}_tL$ jako różnicę w chwili t pomiędzy wartością obecną przyszłych wypłat a wartością obecną przyszłych składek. Oczywiście zakładamy, że rozważany x-latek w chwili t jeszcze żyje, a więc przyszły czas życia x-latka T_x jest większy niż t. W przeciwnym razie, po chwili t nie nastąpią już ani żadne wypłaty, ani nie wpłyną już żadne składki, czyli ${}_tL = 0$ jeżeli $T_x < t$.

DEFINICJA 5. **Rezerwą składki netto** nazywamy wielkość ${}_tV$ określoną wzorem

$${}_tV = E({}_tL \mid T > t).$$

Inaczej mówiąc rezerwa składki netto jest to średnie warunkowe zobowiązanie ubezpieczyciela z tytułu tej umowy w chwili t, czyli jest to kwota jaką ubezpieczyciel powinien posiadać w chwili t na pokrycie różnic pomiędzy przyszłymi wypłatami i składkami. Jeszcze inaczej jest to wartość umowy dla ubezpieczonego w chwili t, pod warunkiem, że ubezpieczony żyje w chwili t.

Zauważmy ponadto, że ${}_0L = L$, a więc

$$ {}_0V = E({}_0L \mid T > 0) = E(L) = 0. $$

PRZYKŁAD 16. Rozważmy ubezpieczenie 40-latka na życie i dożycie na 10 lat, na sumę 1, płatną na koniec roku śmierci. Rezerwę na koniec k-tego roku obowiązywania takiego ubezpieczenia oznaczamy przez ${}_kV_{40:\overline{10}|}$, dla $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Oczywiście ${}_0V_{40:\overline{10}|} = 0$ oraz ${}_{10}V_{40:\overline{10}|} = 1$, gdyż jeżeli ubezpieczony przeżyje 10 lat, to następuje wypłata w wysokości 1.

Ubezpieczony, dopóki żyje, płaci on na początku każdego roku składkę w wysokości $P_{40:\overline{10}|}$, ale nie dłużej niż 10 lat.

Na przykład załóżmy, że nasz 40-latek przeżył 5 lat. Wtedy obecna wartość przyszłego świadczenia jest taka sama jak wartość obecna przyszłego świadczenia w ubezpieczeniu na życie i dożycie dla 45-latka na 5 lat. Zatem OWA przyszłego świadczenia wynosi $A_{45:\overline{5}|}$.

Ubezpieczony, dopóki żyje, płaci on na początku każdego roku składkę w wysokości $P_{40:\overline{10}|}$, ale nie dłużej niż 10 lat. Zatem skoro przeżył już 5 lat, to obecna wartość przyszłych składek jest taka sama jak obecna wartość renty życiowej terminowej dla 45-latka na 5 lat, ale w wysokości $P_{40:\overline{10}|}$ rocznie. Zatem OWA przyszłych składek wyniesie $P_{40:\overline{10}|}\ddot{a}_{45:\overline{5}|}$. Stąd

$$ {}_5V_{40:\overline{10}|} = A_{45:\overline{5}|} - P_{40:\overline{10}|}\ddot{a}_{45:\overline{5}|}. $$

Ogólnie dla $k = 1, 2, \ldots, 10$

$$ {}_kV_{40:\overline{10}|} = A_{40+k:\overline{10-k}|} - P_{40:\overline{10}|}\ddot{a}_{40+k:\overline{10-k}|}. $$

2.1. Rezerwy składek w ubezpieczeniu na całe życie. Wyprowadzimy teraz dla przykładu wzór na rezerwę składki netto ${}_kV_x$ po k latach trwania umowy w ubezpieczeniu x-latka na całe życie. Wiemy już, że okresowa składka netto w takim ubezpieczeniu wynosi

$$ P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}, $$

gdzie A_x jest jednorazową składką w takim ubezpieczeniu. Strata ubezpieczyciela w chwili k wynosi

$$ {}_kL = \begin{cases} v^{K_x+1-k} - P_x\ddot{a}_{\overline{K_x+1-k}|}, & \text{jeżeli } k \leqslant K_x, \\ 0, & \text{jeżeli } k > K_x. \end{cases} $$

Obliczamy teraz obustronnie wartość oczekiwaną pod warunkiem $K_x \geqslant k$ i dostajemy

$$\begin{aligned}{}_kV_x &= E({}_kL \mid K_x \geqslant k) = \\ &= E(v^{K_x+1-k} \mid K_x \geqslant k) - P_x E(\ddot{a}_{\overline{K_x+1-k}|} \mid K_x \geqslant k).\end{aligned}$$

Ale na mocy hipotezy agregacji HA

$$P(K_x - k = n \mid K_x \geqslant k) = P(K_{x+k} = n),$$

a więc

$${}_kV_x = A_{x+k} - P_x \ddot{a}_{x+k}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

2.2. Ubezpieczenie terminowe. Podobnie jak dla ubezpieczenia na życie wyprowadzamy wzory na rezerwę w ubezpieczeniu terminowym x-latka na n lat. Mianowicie po k latach trwania polisy ($k \leqslant n$) mamy

$${}_kV^1_{x:\overline{n}|} = A^{\;1}_{x+k:\overline{n-k}|} - P^1_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}.$$

2.3. Ubezpieczenie na dożycie. Przy założeniach takich jak wyżej mamy

$${}_kV_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}} = A_{x+k:\overset{\;\;1}{\overline{n-k}|}} - P_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}.$$

2.4. Ubezpieczenie na życie i dożycie. Przy założeniach takich jak wyżej mamy

$${}_kV_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}.$$

2.5. Przykłady. Załóżmy, że x-latek ubezpieczył się na całe życie na sumę C, a więc płaci roczną składkę w wysokości $C\,P_x$. Załóżmy dalej, że po k latach od zawarcia umowy ubezpieczony żyje, ale nie chce (np. nie może) płacić dalej składek. W takiej sytuacji ubezpieczyciel może mu zaproponować dowolny inny rodzaj ubezpieczenia, którego jednorazowa składka netto równałaby się wartości zgromadzonej rezerwy, czyli $C\,{}_kV_x$. Taka zamiana jednego rodzaju ubezpieczenia na inne nosi nazwę **konwersji polisy**. Oczywiście konwersję można rozważać nie tylko dla ubezpieczenia na całe życie, ale również dla innych rodzajów ubezpieczeń. W każdym przypadku obowiązuje zasada, że polisa nowego rodzaju musi być tak skonstruowana, że jej JSN netto jest równa rezerwie składek dotychczasowego ubezpieczenia.

Na przykład, możliwa jest kontynuacja ubezpieczenia na całe życie, bez płacenia składek, ale oczywiście na mniejszą sumę C_{nowe}. Kwota ta jest ustalona tak, że

$$C_{\text{nowe}}\, A_{x+k} = C\, {}_kV_x.$$

Zatem

$$C_{\text{nowe}} = C\, \frac{{}_kV_x}{A_{x+k}} = C\, \frac{A_{x+k} - P_x \ddot{a}_{x+k}}{A_{x+k}} = C \left(1 - \frac{P_x}{A_{x+k}/\ddot{a}_{x+k}}\right).$$

Ostatecznie

$$C_{\text{nowe}} = C \left(1 - \frac{P_x}{P_{x+k}}\right).$$

Przykład 17. Składka w ubezpieczeniu 50-latka na całe życie na sumę 10000 wynosi

$$10000\,P_{50} = 10000\,\frac{M_{50}}{N_{50}} = 10000\,\frac{5367.1479}{181420.475} = 295.84.$$

Po regularnym płaceniu składek przez 5 lat ubezpieczony może zamienić tę polisę na nową polisę na życie, tym razem bez konieczności płacenia składek, ale na sumę

$$C' = 10000\left(1 - \frac{P_{50}}{P_{55}}\right).$$

Mamy

$$P_{55} = \frac{M_{55}}{N_{55}} = \frac{4699.687}{125519.346} = 0.037442,$$

a więc $C' = 2098.69$. Suma ta może wydawać się mała (w porównaniu do 10000), ale musimy pamiętać o krótkim okresie płacenia składek. Jeżeli natomiast ubezpieczony będzie płacił składki przez 20 lat, i nie chce płacić dalej, to może on ją zamienić na nową polisę na sumę

$$C'' = 10000\left(1 - \frac{P_{50}}{P_{70}}\right) = 9211.84.$$

Przykład 18. 40-latek ubezpieczył się na życie i dożycie na 25 lat na sumę 10000. Zatem opłaca on corocznie składkę w wysokości

$$20000P_{40:\overline{25}|} = 20000\frac{M_{40} - M_{65} + D_{65}}{N_{40} - N_{65}} = 20000 \cdot 0.02875 = 574.98.$$

Obecnie po 20 latach opłacania składek ubezpieczony nie chce już dalej płacić składek w tej wysokości, i dostał od ubezpieczyciela trzy oferty.

- Pierwsza to oferta zamiany polisy na taką, która gwarantuje wypłatę rezerwy netto w formie dożywotniej renty, płatnej co miesiąc z góry przez najbliższe 5 lat. Obliczymy wysokość Π comiesięcznej wypłaty. Wielkość tą wyznaczamy z zależności

  $$20000\,{}_{20}V_{40:\overline{25}|} = 12 \cdot \Pi \cdot \ddot{a}^{(12)}_{60:\overline{5}|},$$

  a więc

  $$\Pi = 20000\,\frac{{}_{20}V_{40:\overline{25}|}}{12 \cdot \ddot{a}^{(12)}_{60:\overline{5}|}}.$$

  Mamy

  $$A_{60:\overline{5}|} = \frac{M_{60} - M_{65} + D_{65}}{D_{60}} = 0.83032,$$

  oraz

  $$\ddot{a}_{60:\overline{5}|} = \frac{N_{60} - N_{65}}{D_{60}} = 4.41168.$$

  Zatem

  $${}_{20}V_{40:\overline{25}|} = A_{60:\overline{5}|} - P_{40:\overline{25}|}\ddot{a}_{60:\overline{5}|} = 0.70348.$$

  Ponadto $\beta(12) = 11/24$

  $$\ddot{a}^{(12)}_{60:\overline{5}|} = \ddot{a}_{60:\overline{5}|} - \beta(12) = 3.95334.$$

Stąd $\Pi = 265.76$.

- Druga oferta, to zamiana na polisę na życie i dożycie na 5 lat, bezskładkową na sumę $C_1 < 20000$. Wyznaczmy wielkość C_1. Jest ona zadana równaniem
$$C_1 A_{60:\overline{5}|} = 20000 \cdot {}_{20}V_{40:\overline{25}|},$$
a więc
$$C_1 = 20000 \cdot \frac{A_{60:\overline{5}|} - P_{40:\overline{25}|}\ddot{a}_{60:\overline{5}|}}{A_{60:\overline{5}|}} = 20000 \cdot \left(1 - \frac{P_{40:\overline{25}|}}{P_{60:\overline{5}|}}\right).$$
Korzystając z powyższych obliczeń mamy
$$P_{60:\overline{5}|} = \frac{A_{60:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{60:\overline{5}|}} = \frac{0.83032}{4.41168} = 0.18821,$$
a więc
$$C_1 = 20000 \cdot \left(1 - \frac{0.02875}{0.18821}\right) = 16944.90.$$
- Trzecia oferta to płacenie przez następne 5 lat składek rocznych w wysokości połowy dotychczasowych składek, ale ze zmianą sumy ubezpieczenia na $C_2 < 20000$. Obliczymy nową sumę ubezpieczenia. Wielkość tę wyznaczymy ze wzoru
$$20000\,{}_{20}V_{40:\overline{25}|} = C_2 A_{60:\overline{5}|} - \frac{1}{2} \cdot 20000 \cdot P_{40:\overline{25}|}\ddot{a}_{60:\overline{5}|}.$$
Zatem po przekształceniach jak wyżej
$$C_2 = 20000 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{P_{40:\overline{25}|}}{P_{60:\overline{5}|}}\right) = 18472.45.$$

2.6. Jeszcze o rezerwach w ubezpieczeniu na całe życie. Rozważmy jeszcze raz rezerwy w ubezpieczeniu na całe życie. Przypomnijmy, że
$${}_kV_x = A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k}, \quad k = 0, 1, 2\ldots, \tag{a}$$
gdzie

- A_{x+k} oznacza jednorazową składką netto w ubezpieczeniu $(x+k)$-latka na całe życie,
- P_x oznacza wysokość składki rocznej w ubezpieczeniu x-latka,
- $\ddot{a}_{x+k}$ jest wartością aktuarialną renty dożywotniej dla $(x+k)$-latka.

Dalej zauważmy, że
$$A_x = v\left[q_x + p_x A_{x+1}\right], \tag{b}$$
gdyż składka w ubezpieczeniu na życie x-latka powinna pokrywać

- ubezpieczenie x-latka na najbliższy rok; składka za takie ubezpieczenie wynosi vq_x;
- ubezpieczenie x-latka na całe życie odroczone o 1 rok; składka w tym ubezpieczeniu wynosi
$${}_{1|}A_x = vp_xA_{x+1}.$$

Sumując obydwa składniki otrzymujemy szukany wzór.

Analogicznie

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1}. \tag{c}$$

Istotnie, wartość aktuarialna renty dożywotniej dla x-latka jest taka sama jak wartość renty odroczonej o rok (czyli $vp_x\ddot{a}_{x+1}$) powiększona o 1 (czyli o pierwszą ratę renty).

Wykażemy teraz, że

$${}_kV_x + P_x = v\left[q_{x+k} + {}_{k+1}V_x p_{x+k}\right]. \tag{d}$$

Mamy

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &\overset{(a)}{=} v\left[q_{x+k} + (A_{x+k+1} - P_x\ddot{a}_{x+k+1})\,p_{x+k}\right] \\
&\overset{(a)}{=} (vq_{x+k} + vp_{x+k}A_{x+k+1}) - P_x\, vp_{x+k}\ddot{a}_{x+k+1} \\
&\overset{(b),(c)}{=} A_{x+k} + P_x(1 - \ddot{a}_{x+k}) \\
&= A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k} + P_x \\
&\overset{(a)}{=} {}_kV_x + P_x = \mathrm{L}.
\end{aligned}$$

Ze wzoru (d) łatwo otrzymujemy wzór

$${}_kV_x + P_x = v\left[{}_{k+1}V_x + (1 - {}_{k+1}V_x)q_{x+k}\right]. \tag{e}$$

Wzór (e) ma następującą interpretację: ${}_kV_x$ oznacza wartość umowy po k latach od chwili jej zawarcia. Inaczej jest to kwota, którą należy wypłacić ubezpieczonemu, który nie chce dalej kontynuować ubezpieczenia, a więc w chwili k ubezpieczyciel powinien mieć zgromadzoną sumę ${}_kV_x$. Jednocześnie w chwili k ubezpieczyciel pobiera składkę w wysokości P_x za kolejny rok ubezpieczenia. Wzór (e) mówi, że suma rezerwy i składki jest wartością obecną kwoty potrzebnej za rok. Kwota ta wynosi co najmniej ${}_{k+1}V_x$ nie zależnie od tego czy ubezpieczony przeżyje czy nie. Jeżeli jednak nie przeżyje (co stanie się z prawdopodobieństwem q_{x+k}), to oprócz ${}_{k+1}V_x$ potrzebna będzie jeszcze kwota $1 - {}_{k+1}V_x$, gdyż ubezpieczenie jest zawarte na sumę 1.

Wzór (e) można zapisać w postaci

$$P_x = v_{k+1}V_x - {}_kV_x + v(1 - {}_{k+1}V_x)q_{x+k},$$

a więc

$$P_x = \pi_k^s + \pi_k^r,$$

gdzie

$$\pi_k^s = v_{k+1}V_x - {}_kV_x \tag{f}$$

jest to tzw. część oszczędnościowa składki P_x, oraz

$$\pi_k^r = v(1 - {}_{k+1}V_x)q_{x+k}$$

jest to tzw. część pokrywająca ryzyko śmierci w ciągu najbliższego roku.

Ze wzoru (f) wynika następujący wzór

$$ {}_kV_x = \sum_{j=0}^{k-1} (1+i)^{k-j} \pi_j^s. \tag{ćw} $$

Wzór ten oznacza, że wartość rezerwy ${}_kV_x$ zgromadzonej jest równa wartości zakumulowanej przeszłych składek oszczędnościowych, a nie całej wartości składek P_x. Podobną analizę składek można przeprowadzić w innych typach ubezpieczeń.

2.7. Rezerwy składek płaconych krócej niż okres ubezpieczenia. Rozważmy teraz przypadek ubezpieczeń opłacanych składką okresową, ale przez okres krótszy niż okres ważności ubezpieczenia.

Jako pierwszy przykład rozważmy ubezpieczenie x-latka na całe życie na sumę 1, ze składką płaconą przez pierwsze h lat. Przypomnijmy, że roczna składka w takim ubezpieczeniu wynosi

$$ {}_hP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}. $$

Rezerwę w chwili k w takim ubezpieczeniu oznaczamy symbolem ${}^h_kV_x$. Można ją obliczyć ze wzoru

$$ {}^h_kV_x = \begin{cases} A_{x+k} - {}_hP_x \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}, & \text{dla } k \leqslant h, \\ A_{x+k}, & \text{dla } k > h, \end{cases} $$

Przypomnijmy, że w zwykłym ubezpieczeniu na całe życie

$$ {}_kV_x = A_{x+k} - P_x \ddot{a}_{x+k}. $$

Zauważmy, że $\ddot{a}_{x:\overline{h}|} < \ddot{a}_x$, a więc ${}_hP_x > P_x$. Zatem w okresie opłacania składek rezerwa w ubezpieczeniu ”kombinowanym” jest mniejsza niż w zwykłym, a gdy opłacanie składek ustaje nierówność zmienia się na przeciwną.

Podobne wzory można podać w przypadku ubezpieczenia na życie i dożycie na n lat, opłacanego przez h lat, $h \leqslant n$, składką roczną w wysokości

$$ {}_hP_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}. $$

Rezerwa w takim ubezpieczeniu wyraża się wzorem

$$ {}^h_kV_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP_{x:\overline{n}|} \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}, & \text{gdy } k \leqslant h, \\ A_{x+k:\overline{n-k}|} & \text{gdy } h < k \leqslant n. \end{cases} $$

Ostatni przykład to renta dożywotnia odroczona o m lat, opłacana składką przez pierwsze m lat. Wtedy składka roczna wynosi

$$ {}_mP\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right) = \frac{{}_{m|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} $$

oraz rezerwa w chwili k

$$ {}_k^hV\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right) = \begin{cases} {}_{m-k|}\ddot{a}_{x+k} - {}_mP\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|}, & \text{gdy } k \leqslant m, \\ \ddot{a}_{x+k}, & \text{gdy } k > m. \end{cases} $$

2.8. Wzory komutacyjne na rezerwy. Korzystając ze wzorów na A_x, P_x i $\ddot{a}_x$ w terminach funkcji komutacyjnych łatwo można wyprowadzić analogiczne wzory na rezerwy. Mianowicie,

$$ A_x = \frac{M_x}{D_x}, \quad \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}, \quad P_x = \frac{M_x}{N_x}, $$

a więc

$$ {}_kV_x = \frac{M_{x+k}N_x - M_xN_{x+k}}{D_{x+k}}. $$

Podobne wzory można wyprowadzić dla rezerw w innych typach ubezpieczeń.