ROZDZIAŁ 4

Ubezpieczenia na życie

Ubezpieczenie na życie jest to kontrakt (zwany polisą), w którym ubezpieczony zobowiązuje się do opłacenia składki (jednorazowo lub w ratach), a w zamian za to ubezpieczyciel zobowiązuje się do wypłacenia pewnej kwoty (zwanej **sumą ubezpieczenia**) w razie określonego zdarzenia związanego z życiem lub śmiercią ubezpieczonego.

1. Rodzaje ubezpieczeń na życie

Ze względu na moment płatości świadczenia ubezpieczenia na życie dzielimy na:

- **ciągłe**, tzn. płatne w chwili śmierci;
- **dyskretne**, tzn. płatne na koniec roku lub podokresu śmierci ubezpieczonego;
- **na dożycie**, tzn. płatne na koniec okresu objętego ubezpieczeniem; inaczej mówiąc ubezpieczony otrzyma świadczenie jeżeli dożyje ustalonego momentu czasu

Ze względu na okres ważności polisy ubezpieczenia życiowe dzielimy na:

- **bezterminowe**, tzn. ważne przez całe przyszłe życie ubezpieczonego;
- **terminowe**, tzn. ważne przez do ustalonego z góry momentu czasu;
- **odroczone**, tzn. ważne od pewnego momentu czasu (terminowo lub bezterminowo).

W dalszym ciągu przez i będziemy oznaczać tzw. **techniczną stopę procentową**. Jest ona ustalana przez ubezpieczyciela na bezpiecznym niskim poziomie (od 3% do 5%).

W najprostszym bezterminowym ubezpieczeniu na życie ubezpieczycial zobowiązuje się, że w razie śmierci ubezpieczonego wypłaci uposażonym (rodzinie lub innym osobom wskazanym przez ubezpieczonego) określonej kwoty pieniędzy. Dla uproszczenia zakładamy, że suma ubezpieczenia wynosi 1. Jest to tzw. przypadek znormalizowany. Pytamy teraz ile wynosi wartość takiej polisy, tzn. jaką opłatę (składkę) należy pobrać za sprzedaż takiej polisy.

Gdyby czas T, który pozostał do śmierci ubezpieczonego był z góry znany, to należałoby pobrać opłatę w wysokości obecnej wartości sumy ubezpieczenia, czyli w wysokości v^T, gdzie $v = \frac{1}{1+i}$ jest czynnikiem dyskonta. Oczywiście $v^T < 1$, co powoduje że ubezpieczony ubezpieczony może liczyć na zysk z ubezpieczenia.

Ale T jest zmienną losową, a więc OW świadczenia, którą na razie oznaczamy przez Z jest również zmienną losową. Ponieważ nie możemy pobierać składki w losowej wysokości, to miarą wartości polisy jest wartość oczekiwana EZ obecnej wartości świadczenia. Nazywana jest ona **jednorazową składką netto** lub **wartością aktuarialną** świadczenia. W praktyce składka netto nie jest stosowana, gdyż nie uwzględnia żadnych kosztów prowadzenia działalności ubezpieczeniowej, ani ewentualnych zysków. Jednak wyznaczenie składki netto jest pierwszym krokiem przy wyznaczaniu rzeczywistej wartości zawieranej polisy.

Zauważmy, że przyjęcie średniej składki netto naraża ubezpieczyciela na ryzyko, gdyż faktyczna wysokość świadczenia może przekroczyć swoją wartość oczekiwaną, co powoduje stratę ubezpieczyciela. Jedną z miar tego ryzyka jest **wariancja** zmiennej losowej Z, czyli

$$\operatorname{Var} Z = E(Z - E(Z))^2 = EZ^2 - (EZ)^2.$$

Liczbę $\sigma(Z) = \sqrt{\operatorname{Var} Z}$ nazywamy **odchyleniem standardowym** zmiennej losowej Z. Zauważmy, że $\operatorname{Var}(aZ) = a^2 \operatorname{Var}(Z)$, a więc dla $a \geqslant 0$ mamy $\sigma(aZ) = a\sigma(Z)$.

Przypomnijmy, że dla dowolnych zmiennych losowych X i X mamy

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y),$$

ale podobna równość dla wariancji nie zawsze zachodzi. Aby wyznaczyć wariancję sumy $X + Y$ wprowadzamy wielkość zwaną **kowariancją** zmiennych X i Y

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) = E(XY) - EX \cdot EY.$$

Jeżeli zmienne losowe X i Y są niezależne, to $EXY = EX \cdot EY$, a więc $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.

Mamy teraz dla dowolnych zmiennych losowych X i Y

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X + Y) &= E\left[(X + Y) - E(X + Y)\right]^2 \\ &= E\left[(X - EX) + (Y - EY)\right]^2 \\ &= E(X - E(X))^2 + E(Y - E(Y))^2 + 2E(X - EX)(Y - EY).\end{aligned}$$

Zatem zawsze

$$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X, Y),$$

a w szczególności dla niezależnych zmiennych losowych

$$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y).$$

Uwaga. W dalszym ciągu będziemy zawsze zakładać, że spełniona jest jedna z hipotez agregacyjnych: hipoteza jednorodnej populacji HJP lub hipoteza agregacji HA.

2. Ubezpieczenia płatne w chwili śmierci

Wyznaczymy teraz wartości aktuarialne i ryzyko różnych ubezpieczeń płatnych w chwili śmierci (przypadek ciągły). Chociaż w praktyce takie ubezpieczenia występują rzadko, to jest to dobry przypadek modelowy. Wzory dla przypadku ciągłego przenoszą się niemal automatycznie na przypadek ubezpieczeń dyskretnych.

Zakładamy, że znany jest rozkład przyszłego czasu życia T_x. Jego gęstość wyraża się wzorem

$$f_x(t) = {}_tp_x \mu_{x+t}.$$

Będziemy korzystać z następującego wzoru, prawdziwego dla dowolnej funkcji h

$$E(h(T_x)) = \int_0^\infty h(t) f_x(t) dt = \int_0^\infty h(t) {}_tp_x \mu_{x+t} dt.$$

Ponadto zawsze zakładamy, że suma ubezpieczenia wynosi 1.

2.1. Ubezpieczenie na całe życie. Ubezpieczenie takie gwarantuje wypłatę sumy 1 w chwili śmierci, to znaczy po upływie T_x czasu od chwili wykupienia polisy. Zatem obecna wartość takiej polisy wynosi

$$Z = v^{T_x},$$

a składka netto wynosi

$$\bar{A}_x = E\left(v^{T_x}\right) = \int_0^\infty v^t f_x(t) dt = \int_0^\infty v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt.$$

Dalej, drugi moment zmiennej losowej Z wynosi

$${}^2\bar{A}_x = EZ^2 = E\left(v^{T_x}\right)^2 = E\left(v^{2T_x}\right) = \int_0^\infty v^{2t} {}_tp_x \mu_{x+t} dt.$$

Zatem ${}^2\bar{A}_x$ jest równe $\bar{A}_x$ obliczonemu przy kwadracie danego czynnika dyskonta (lub przy podwojonym natężeniu oprocentowania 2δ). Mamy zatem

$$\operatorname{Var} Z = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2.$$

Przykład 11. Obliczyć wysokość składki w bezterminowym ubezpieczeniu na życie 50-latka na sumę 100000 PLN, jeżeli przyszły czas życia ma stałe natężenie śmiertelności $\mu_{50+t} = 0.02$ oraz $\delta = 0.05$.

Rozwiązanie. Wtedy T_{50} ma rozkład wykładniczy z parametrem 0.02, o gęstości

$$f_{50}(t) = 0.02\mathrm{e}^{-0.02t}, \quad t \geqslant 0.$$

Ponadto $v = \mathrm{e}^{-\delta} = \mathrm{e}^{-0.05}$. Zatem

$$\bar{A}_{50} = 0.02 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-0.05t} \mathrm{e}^{-0.02t} = \frac{0.02}{0.07} = 0.285714.$$

Stąd szukana składka wynosi $100000 \cdot \bar{A}_x = 28571.4$ PLN.

Definicja 4. Niech A będzie zdarzeniem losowym. **Indykatorem** zdarzenia A nazywamy zmienną losową $\mathbf{1}(A)$ określoną wzorem

$$\mathbf{1}(A) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } A \text{ zaszło,} \\ 0, & \text{jeśli } A \text{ nie zaszło.} \end{cases}$$

Zauważmy, że jeżeli $\mathrm{P}(A) = p$, to $\mathbf{1}(A)$ przyjmuje wartości 1 i 0 z prawdopodobieństwami p i $1 - p$. Zatem

$$E(\mathbf{1}(A)) = 1 \cdot \mathrm{P}(A) + 0 \cdot \mathrm{P}(A') = \mathrm{P}(A)$$

oraz

$$E(\mathbf{1}(A))^2 = 1^2 \cdot \mathrm{P}(A) + 0^2 \cdot \mathrm{P}(A') = \mathrm{P}(A),$$

a więc

$$\mathrm{Var}(\mathbf{1}(A)) = \mathrm{P}(A) - (\mathrm{P}(A))^2 = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(A').$$

2.2. Ubezpieczenie terminowe. Ubezpieczenie terminowe n-letnie gwarantuje wypłatę świadczenia tylko, jeżeli śmierć ubezpieczonego nastąpi w ciągu najbliższych n lat (w przypadku ubezpieczeń płatnych w chwili śmierci n nie musi być całkowite). Jeżeli ubezpieczony przeżyje n lat, nie otrzymuje żadnego świadczenia. Obecna wartość tego świadczenia wynosi

$$Z = v^{T_x} \mathbf{1}(T_x \leqslant q) = \begin{cases} v^{T_x}, & \text{jeżeli } T \leqslant n, \\ 0, & \text{jeżeli } T \geqslant n. \end{cases}$$

Jednorazowa składka netto wynosi

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = EZ = \int_0^n v^t f_x(t) dt = \int_0^\infty v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

Dalej, drugi moment zmiennej losowej Z wynosi

$${}^2\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = EZ^2 = \int_0^n v^{2t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

2.3. Ubezpieczenie na dożycie. Czyste ubezpieczenie na dożycie długości n gwarantuje wysłatę sumy ubezpieczenia w chwili n, pod warunkiem że ubezpieczony dożył tej chwili. Zatem obecna wartość tego świadczenia wynosi

$$Z = v^n \mathbf{1}(T_x \geqslant n).$$

Stąd JSN tego ubezpieczenia wynosi

$$\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n {}_n p_x.$$

Wariancja obecnej wartości wynosi

$$\mathrm{Var}(Z) = v^{2n} {}_n p_{x n} q_x.$$

2.4. Ubezpieczenie na życie i dożycie. Ubezpieczenie to gwarantuje wypłatę sumy ubezpieczenia w chwili śmierci, jeżeli nastąpi ona w cigu n lat, w przeciwnym razie — na koniec tego kresu. Jest to zatem ubezpieczenie terminowe połączone z ubezpieczeniem na dożycie. Obecna wartość tego ubezpieczenia wynosi

$$Z = \begin{cases} v^{T_x}, & \text{jeżeli } T_x \leqslant n, \\ v^n, & \text{jeżeli } T_x > n \end{cases} = v^{T_x}\mathbf{1}(T_x \leqslant n) + v^n\mathbf{1}(T_x > n).$$

Zatem obecna wartość jest równa sumie obecnych wartości ubezpieczenia terminowego Z_1 i ubezpieczenia na dożycie Z_2. Stąd JSN wynosi

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = E(Z_1 + Z_2) = E(Z_1) + E(Z_2) = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

Natomiast

$$\operatorname{Var}(Z) = \operatorname{Var}(Z_1 + Z_2) = \operatorname{Var}(Z_1) + \operatorname{Var}(Z_2) + 2\operatorname{Cov}(Z_1, Z_2).$$

Mamy $E(Z_1Z_2) = 0$, a więc $\operatorname{Cov}(Z_1, Z_2) = -E(Z_1)E(Z_2)$. Zatem

$$\operatorname{Var}(Z) = \operatorname{Var}(Z_1) + \operatorname{Var}(Z_2) - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

Oczywiście

$$\operatorname{Var}(Z) \leqslant \operatorname{Var}(Z_1) + \operatorname{Var}(Z_2),$$

a więc ubezpieczyciel ponosi mniejsze ryzyko sprzedając jednej osobie ubezpieczenie na życie i dożycie niż sprzedając oddzielnie dwie polisy: jedną, x-latkowi terminową n-letnią, a drugą, innemu x-latkowi n-letnią na dożycie.

2.5. Odroczone ubezpieczenie na całe życie. W ubezpieczeniu takim suma ubezpieczenia jest wypłacana tak jak w zwykłym ubezpieczeniu na całe życie, ale nie wcześniej niż m lat od chwili zawarcia umowy (wykupienia polisy). Zatem obecna wartość tego świadczenia wynosi

$$Z = \begin{cases} v^{T_x}, & \text{jeżeli } T_x \geqslant m, \\ 0, & \text{jeżeli } T_x < m. \end{cases}$$

Zauważmy, że $Z = Z_1 - Z_2$, gdzie Z_1 jest obecną wartości ubezpieczenia na całe życie, a Z_2 – obecną wartością m-letniego ubezpieczenia terminowego. Stąd

$$_{m|}\bar{A}_x = E(Z) = \bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\overline{m}|} = \int_m^\infty v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt.$$

TWIERDZENIE 9. *Przy założeniu HJP*

$$_{m|}\bar{A}_x = {}_mp_x v^m \bar{A}_{x+m}.$$

Dowód. Mamy na mocy HJP

$$ {}_tp_x = {}_mp_x {}_{t-m}p_{x+m}. $$

Zatem

$$ \begin{aligned} {}_{m|}\bar{A}_x &= \int_m^\infty v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_m^\infty v^t {}_mp_x \, {}_{t-m}p_{x+m} \, \mu_{x+m+(t-m)} dt \\ &= v^m {}_mp_x \int_0^\infty v^s {}_sp_{x+m} \mu_{x+m+s} ds \\ &= {}_mp_x v^m \bar{A}_{x+m}. \end{aligned} $$

□

3. Ubezpieczenia płatne na koniec roku śmierci

Rozważymy teraz przypadek ubezpieczeń płatnych dyskretnie, tzn. nie w chwili śmierci, ale na koniec roku śmierci (koniec roku, w którym ubezpieczony umiera). Chodzi tu o pełne lata (lub później podokresy takie jak miesiące, kwartały itp.) liczone od dnia zawarcia umowy, a nie o lata czy miesiące kalendarzowe.

Jeżeli ubezpieczany ma obecnie x-lat, to jego przyszły czas życia oznaczamy przez T_x, a obcięty przyszły czas życia przez K_x. Zatem chwilą wypłaty jest K_x+1. Będziemy korzystać z następujących wzorów

$$ \mathrm{P}(K_x = k) = {}_{k|1}q_x = {}_{k|}q_x = {}_kp_x q_{x+k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, $$

a więc dla dowolnej funkcji h

$$ Eh(K_x) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \mathrm{P}(K_x = k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) {}_kp_x q_{x+k}. $$

Uwaga. Inaczej niż w przypadku ubezpieczeń ciągłych, jeśli mówimy o okresie n lat, to n musi być liczbą całkowitą.

3.1. Ubezpieczenie na całe życie.

3.1. Ubezpieczenie na całe życie. Ubezpieczenie takie gwarantuje wypłatę sumy 1 na koniec roku śmierci ubezpieczonego. Zatem OW takiej polisy wynosi

$$ Z = v^{K_x+1}, $$

a JSN wynosi

$$ A_x = E\left(v^{K_x+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \mathrm{P}(K_x = k) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}. $$

Drugi moment i wariancję Z można policzyć ze wzoru

$$ {}^2A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2(k+1)} {}_kp_x q_{x+k}. $$

Przykład 12. Obliczmy składkę netto w ubezpieczeniu na całe życie 50-latka, jeżeli $v = 0.9$, a przyszły czas życia spełnia prawo de Moivre'a z $\omega = 100$.

Rozwiązanie. T_{50} ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 50]$, a więc

$$P(K_{50} = k) = \frac{1}{50}, \quad k = 0, 1, \ldots, 49.$$

Stąd

$$A_{50} = \frac{1}{50} \sum_{k=0}^{49} v^{k+1} = \frac{1}{50} \frac{v - v^{51}}{1 - v} = 0.17907.$$

3.2. Ubezpieczenie terminowe. Ubezpieczenie takie gwarantuje wypłatę sumy ubezpieczenia tylko, jeśli śmierć nastąpi w ciągu najbliższych n lat. Jego obecna wartość, JSN oraz drugi moment wynoszą odpowiednio

$$Z = v^{K_x+1}\mathbf{1}(K_x < n) = \begin{cases} v^{K_x+1}, & \text{jeżeli } K_x < n, \\ 0, & \text{jeżeli } K_x \geqslant k, \end{cases}$$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}.$$

$${}^2A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)} {}_kp_x q_{x+k}.$$

Jest to często spotykane ubezpieczenie. Powodem do wykupienia takiego ubezpieczenia może być wzięcie dużego kredytu (np. na dom) i chęć zabezpieczenia jego spłaty w razie przedwczesnej śmierci.

3.3. Ubezpieczenie na dożycie. Ubezpieczenie takie gwarantuje wypłatę sumy 1 po upływie n lat od zawarcia umowy, pod warunkiem, że ubezpieczony dożyje tej chwili. Przy zastrzeżeniu, że n jest liczbą całkowitą, sytuacja jest dokładnie taka sama jak w modelu ciągłym. Zatem

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n {}_np_x.$$

Ubezpieczenie takie jest formą oszczędzania. Różni się ona od lokaty w banku tym, że w razie śmierci ubezpieczenie ustaje, wpłacone składki przepadają ubezpieczonemu. Wytworzony w ten sposób dochód ulega rozłożeniu na pozostałych ubezpieczonych, którzy przeżyją okres ubezpieczenia. Ale można w ten sposób zarobić więcej niż na lokacie.

3.4. Ubezpieczenie na życie i dożycie. Jest to połączenie ubezpieczenia terminowego z ubezpieczeniem na dożycie. Obecna wartość ubezpieczenia n-letniego wynosi

$$Z = v^{K_x+1}\mathbf{1}(K_x < n) + v^n\mathbf{1}(K_x \geqslant n) = Z_1 + Z_2.$$

Zatem, tak jak w przypadku ciągłym

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}},$$

oraz

$$\operatorname{Var}(Z) = \operatorname{Var}(Z_1) + \operatorname{Var}(Z_2) - 2A^1_{x:\overline{n}|}A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}.$$

Ubezpieczenie takie jest typowym ubezpieczeniem z uwzględnieniem efektu oszczędnościowego. Celem jest utrzymanie standardu finansowego rodziny po śmierci jednego z jej członków, a ponadto w razie dożycia określonego wieku, pewnej wypłaty, np. emerytury. Typowe ubezpieczenie kończy się po uzyskaniu przez ubezpieczonego 60 lub 65 lat.

4. Związki między modelem ciągłym i dyskretnym

Zastanówmy się teraz jak obliczać wartości aktuarialne ubezpieczeń płatnych w chwili śmierci mając dane tablice trwania życia. Problem polega na tym, że z tablic można jedynie odczytać rozkład zmiennej K_x, a nie T_x. Szukamy zatem zależności pomiędzy A_x i $\bar{A}_x$.

Będziemy zakładać hipotezę jednostajności HU. Niech

$$S_x = T_x - K_x$$

oznacza ułamkowy czas życia. Przypomnijmy, że przy założeniu HU, zmienne S_x i K_x są niezależne oraz S_x ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

TWIERDZENIE 10. *Przy założeniu HU*

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x.$$

DOWÓD. Mamy

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= E(v^{K_x+S_x}) = E(v^{K_x+1}v^{S_x-1}) = E(v^{K_x+1})E(v^{S_x-1}) \\ &= A_x E(\mathrm{e}^{\delta(S_x-1)})\end{aligned}$$

Ale

$$E(\mathrm{e}^{\delta(S_x-1)}) = \int_0^1 \mathrm{e}^{\delta(t-1)}dt = \frac{\mathrm{e}^\delta - 1}{\delta} = \frac{i}{\delta}.$$

□

Podobnie pokazujemy, że

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|}.$$

UWAGA. $\bar{A}_{x:\overline{n}|} \neq \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}$, bo $A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$.

5. Funkcje komutacyjne

Jest to tradycyjna metoda obliczania wartości ubezpieczeń dyskretnych, i w dobie komputerów zachowała znaczenie jedynie dydaktyczne.

Przypomnijmy, że

$$\mathrm{P}(K_x = k) = {}_{k|1}q_x = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} = \frac{d_{x+k}}{l_x}.$$

Zatem

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x},$$

a więc

$$l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} d_{x+k} v^{k+1}$$

oraz

$$v^x l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} d_{x+k} v^{x+k+1}. \tag{*}$$

Składniki sumy po prawej stronie zależą teraz nie od x, czy k a jedynie od $x+k$.

Przyjmijmy następujące oznaczenia

$$D_x = v^x l_x,$$

$$C_x = v^{x+1} d_x$$

oraz

$$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$$

Twierdzenie 11. *Zachodzą następujące wzory*

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{D_{x+k}}{D_x}$$

oraz

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+k}}{D_x}.$$

Dowód. Z (*) mamy

$$D_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k} = M_x.$$

Dalej

$$\begin{aligned}
A^{1}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\frac{d_{x+k}}{l_x} - \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1}\frac{d_{x+k}}{l_x} \\
&= \frac{M_x}{D_x} - \frac{1}{l_x}\sum_{k=0}^{\infty} v^{n+k+1}\frac{d_{x+n+k}}{l_x} \\
&= \frac{M_x}{D_x} - \frac{1}{D_x}\sum_{k=0}^{\infty} v^{x+n+k+1}\frac{d_{x+n+k}}{l_x} \\
&= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}
\end{aligned}$$

Zatem

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+k}}{D_x}$$

□

6. Inne typy ubezpieczeń

6.1. Ubezpieczenia płatne na koniec podokresu śmierci. Ustalmy $m \geqslant 2$ i podzielmy każdy rok na m podokresów. Na przykład, jeśli $m = 4$, to podokresem jest kwartał, a jeśli $m = 12$, to podokresem jest miesiąc. Oprócz ubezpieczeń płatnych na koniec roku śmierci można rozważać ubezpieczenia płatne na koniec pod okresu śmierci. Zatem chwilą płatności świadczenia jest $K_x + S_x^{(m)}$, gdzie

$$S_x^{(m)} = \frac{\lfloor mS_x + 1\rfloor}{m}$$

oraz $S_x = T_x - K_x$. Istotnie, jeżeli śmierć nastąpi w k-tym podokresie roku śmierci, to

$$\frac{k-1}{m} \leqslant S_x < \frac{k}{m}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Stąd

$$k \leqslant mS_x + 1 < k + 1,$$

a więc

$$S_x^{(m)} = \frac{\lfloor mS_x + 1\rfloor}{m} = \frac{k}{m}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Zauważmy teraz, że przy założeniu hipotezy jednostajności HU zmienne losowe K_x i $S_x^{(m)}$ są niezależne. Ponadto, S_x ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$, a więc dla dowolnych $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ mamy $\mathrm{P}(a < S_x < b) = b - a$. W szczególności mamy

$$\mathrm{P}\left(S_x^{(m)} = \frac{k}{m}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{k-1}{m} \leqslant S_x < \frac{k}{m}\right) = \frac{1}{m}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Rozważmy teraz szczegółowo ubezpieczenie na całe życie płatne na koniec podokresu śmierci. Wartość obecna takiego świadczenia wynosi

$$Z = v^{K_x + S_x^{(m)}}.$$

Jeżeli oznaczymy $A_x^{(m)} = EZ$, to przy założeniu hipotezy HU mamy

$$A_x^{(m)} = E(v^{K_x+1})\, E(v^{S_x^{(m)}-1}).$$

Ale $E(v^{K_x+1}) = A_x$ oraz

$$E(v^{S_x^{(m)}-1}) = \sum_{j=1}^{m} v^{\frac{j}{m}-1} \cdot \frac{1}{m} = \frac{i}{i^{(m)}}.$$

Ostatecznie, przy założeniu HU,

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x.$$

6.2. Zmienna funkcja korzyści. Do tej pory zakładaliśmy, że suma ubezpieczenia wynosi 1, i nie zależy od chwili śmierci ubezpieczonego. Możliwe są jednak ubezpieczenia, w których suma ubezpieczenia zależy od chwili śmierci.

Jako pierwszy przykład rozważmy ubezpieczenie na życie z rosnącą sumą ubezpieczenia, płatne na koniec roku śmierci. Mianowicie ubezpieczenie takie gwarantuje wypłatę w wysokości $k+1$ na koniec roku śmieci, jeśli ubezpieczony przeżyje **dokładnie** k pełnych lat. Zatem wartość obecna takiego świadczenia wynosi

$$Z = (K_x + 1)v^{K_x+1}$$

a jednorazowa składka netto dla takiej polisy wynosi

$$(IA)_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}.$$

Jeżeli określimy kolejną funkcję komutacyjną

$$R_x = \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k},$$

to

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}.$$

Jednorazowa składka netto dla takiej samej polisy, ale terminowej na n lat wynosi

$$\begin{aligned}(IA)_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k} \\ &= \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}.\end{aligned}$$

Możliwe są również wersje powyższych polis wypłacane w chwili śmierci. Na przykład

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^{\infty} t v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

lub

$$(I\bar{A})_x = \int_0^{\infty} \lfloor t+1 \rfloor v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt.$$

Na zakończenie omówimy jeszcze polisę terminową z malejącą sumą ubezpieczenia wypłacaną na koniec roku śmierci. Na przykład, jeśli ważność polisy trwa 15 lat, to w przypadku śmierci w pierwszym roku świadczenie wynosi 15, w drugim roku – 14, ..., a w piętnastym – 1. W przypadku dożycia do wieku $x+15$, żadne świadczenie nie przysługuje.

Ogólnie obecna wartość takiego ubezpieczenia na okres n lat wynosi

$$Z = (n - K_x)v^{K_x+1}\mathbf{1}(K_x < n),$$

a jego wartość aktuarialna wynosi

$$(DA)_{x:\overline{n}|}^{\,1} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}{}_kp_xq_{x+k}.$$