ROZDZIAŁ 2

Elementy matematyki finansowej

1. Procent składany i ciągły

Stopa procentowa i jest związana z podstawową jednostką czasu, jaką jest zwykle jeden rok. Jeśli pożyczamy komuś 100 zł na jeden rok, a po upływie tego czasu osoba ta oddaje 110 zł, to stopa procentowa i takiej opreacji wynosi

$$i = \frac{110 - 100}{100} = 0.1 = 10\%,$$

a odsetki wynoszą $110 - 100 = 10$ zł.

Zawsze zakładamy, że $i > 0$.

Okres kapitalizacji to czas, co który odpowiedni procent (odsetki) jest doliczany do kapitału. Możliwe są dwie *metody kapitalizacji*:

- z góry (na początku każdego okresu);
- z dołu (na końcu każdego okresu).

Na przykład przy lokacie bankowej na 1 rok możliwe jest dopisanie odsetek na upływie całości tego okresu lub po upływie każdego kwartału, miesiąca itp.

Jeśli okres kapitalizacji jest równy podstawowej jednostce czasu, to mówimy o **kapitalizacji zgodnej**, a stopę procentową i nazywamy **efektywną**.

PRZYKŁAD 1. Pożyczamy komuś 100 zł na jeden rok na $i = 10\%$ z rocznym okresem kapitalizacji. Jeśli spłata została odroczona, to dług rośnie następująco:

$$\begin{array}{rl} \text{po roku} & 100 \cdot (1 + 0.1) = 110 \\ \text{po 2 latach} & 110 \cdot (1 + 0.1) = 100 \cdot (1 + 0.1)^2 = 121 \\ \text{po 3 latach} & 121 \cdot (1 + 0.1) = 100 \cdot (1 + 0.1)^3 = 133.1 \text{ itd.} \end{array}$$

Ogólnie, jeżeli zainwestowano kapitał C_0 z efektywną stopą procentową i, to po n latach otrzymujemy

$$S_n = (1 + i)^n C_0.$$

Jeśli po pierwszym, drugim itd. roku zainwestowano dodatkowo $C_1, C_2, \ldots$, to po n latach otrzymujemy

$$S_n = (1 + i)^n C_0 + \sum_{i=1}^{n} (1 + i)^{n-k} C_k.$$

Wielkość S_n nazywamy **zakumulowaną wartością** (ZW) inwestycji.

PRZYKŁAD 2. Zamierzamy zrobić następującą inwestycję: zakładamy lokatę 1000 zł, a następnie po dwóch latach dokładamy do niej 2000, a po następnych dwóch latach

1500 zł. Jaka będzie zakumulowana wartość tej inwestycji po 5 latach? Zakładamy, że $i = 5\%$.

Rozwiązanie. Mamy $n = 5$ oraz $C_0 = 1000$, $C_2 = 2000$, $C_4 = 1500$ oraz $C_1 = C_3 = C_5 = 0$. Zatem zgodnie z powyższym wzorem

$$S_5 = 1000 \cdot (1.05)^5 + 2000 \cdot (1.05)^3 + 1500 \cdot (1.05)^1 = 5166,53.$$

Policzmy teraz jaką kwotę x powinniśmy zainwestować, aby po roku otrzymać ustaloną kwotę S_1. Oczywiście

$$x(1+i) = S_1,$$

a więc szukana kwota to

$$x = \frac{1}{1+i} S_1.$$

Liczbę $v = \frac{1}{1+i}$ nazywamy **czynnikiem dyskonta**. Inczej mówiąc, $S_1 v$ jest **obecną wartością** (OW) (wartością w chwili zero) kwoty S_1 osiągalnej po upływie 1 roku. Podobnie kapitał warty S_n po n latach warty jest obecnie $v^n S_n$.

Zauważmy, że $v < 1$, a więc $S_1 v < S_1$ i ogólnie $S_1 < S_2 < \ldots < S_n$ — czas to pieniądz!!!

Obliczmy jeszcze ile jest obecnie warta inwestycja, która daje wypłaty: C_0 obecnie, C_1 po roku, C_2 po dwóch latach, …, C_n po n-tym roku. Oczywiście C_1 jest warte vC_1, C_2 jest warte $v^2 C_2$, itd, a więc obecna wartość tej inwestycji wynosi

$$C_0 + vC_1 + v^2 C_2 + \ldots + v^n C_n = C_0 + \sum_{k=1}^{n} v^k C_k.$$

Przykład 3. Rozważmy trzy warianty inwestycji przynoszących C_0, C_1 i C_2 w chwilach 0 ,1, i 2 lata przy rocznej stopie procentowej $i = 10\%$.

Wariant	C_0	C_1	C_2
A	100	110	120
B	110	110	110
C	120	110	100

Który z tych wariantów jest najkorzystniejszy dla nas?

Rozwiązanie. Mamy

$$\mathrm{OW} = C_0 + vC_1 + v^2 C_2.$$

Zatem

$$\mathrm{OW}(A) = 100 + \frac{1}{1.1} \cdot 110 + \frac{1}{(1.1)^2} \cdot 120 = 299.17.$$

Podobnie

$$\mathrm{OW}(B) = 300.91$$

$$\mathrm{OW}(C) = 302.64$$

Zatem najkorzystniejsza dla nas jest inwestycja A.

Kapitalizacja niezgodna występuje gdy okres kapitalizacji jest mniejszy niż podstawowa jednostka czasu. Po każdym okresie kapitalizacji odsetki doliczane są do kwoty procentującej. Mówi się wtedy o dwóch stopach:

- nominalnej;
- efektywnej.

Przykład 4. Pożyczamy komuś 100 zł na 10% rocznie, ale kapitalizacja następuje co kwartał. Po upływie każdego kwartału zyskujemy $\frac{1}{4} \cdot 10\% = 2.5\%$. Dług rośnie następująco:

$$\begin{array}{rl} \text{po } 1/4 \text{ roku} & 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0.1\right) \\ \text{po } 1/2 \text{ roku} & 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0.1\right)^2 \\ \text{po } 3/4 \text{ roku} & 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0.1\right)^3 \\ \text{po } 1 \text{ roku} & 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0.1\right)^4 = 110.38 \end{array}$$

Wobec tego po roku otrzymujemy zysk 10.38%, a nie 10%.

Stopę 10% nazywamy **nominalną**, a stopę 10.38% **efektywną**. Aby uzyskać efektywnie 10%, stopa nominalna powinna wynosić 9.645%.

Aby **uzgodnić** stopy procentowe w przypadku kapitalizacji niezgodnej oznaczmy przez i stopę efektywną, a przez $i^{(m)}$ stopę nominalną kapitalizowaną m razy w ciągu roku. Po roku obie stopy powinny dać ten sam kapitał, a więc

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m .$$

Stąd

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1,$$

oraz

$$i^{(m)} = m\left((1+i)^{1/m} - 1\right).$$

Kapitalizacja ciągła. Jeżeli $i^{(m)} = \delta$ jest stałe, ale ilość kapitalizacji okresów m rośnie, to rośnie również efektywna stopa zwrotu oraz w granicy mamy

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 = \mathrm{e}^\delta - 1,$$

gdzie $\mathrm{e} = 2.781\ldots$.

Wielkość

$$\delta = \log(1 + i)$$

nazywamy **siłą stopy procentowej** lub **natężeniem oprocentowania** związanym z efektywną stopą i.

Rozważmy następujący model ciągły: Załóżmy, że w krótkim okresie czasu Δt kapitał przynosi zysk procentowy proporcjonalny do długości tego okresu ze współczynnikiem δ. Tzn. kapitał wart $k(t)$ w chwili t jest warty w chwili $t + \Delta t$

$$k(t + \Delta t) = k(t)\,(1 + \delta \Delta t)\,.$$

Odejmując stronami $k(t)$ i dzieląc przez Δt otrzymujemy

$$\frac{k(t + \Delta t) - k(t)}{\Delta t} = \delta k(t),$$

a więc otzrymaliśmy równanie różniczkowe

$$k'(t) = \delta k(t).$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$k(t) = k(0)\mathrm{e}^{\delta t}.$$

Na odwrót, ile jest wart obecnie kapitał warty $k(t)$ w chwili t?. Rozwiązując równanie

$$k(t) = x\mathrm{e}^{\delta t}$$

dostajemy

$$x = k(t)\mathrm{e}^{-\delta t}.$$

Przykład 5. Pożyczamy komuś 100 zł przy stopie efektywnej $i = 10\%$. Zatem $\delta = \log(1 + i) = 0.09531$. Po okresie 2/3 roku ZW wyniesie

$$100 \cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\delta} = 106.56,$$

a obecna wartość kapitału wartego 100 zł w chwili 2/3 roku wynosi

$$100 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\delta} = 93.84.$$

Przykład 6. Po jakim czasie zwiększymy swój kapitał k-krotnie przy efektywnej stopie i? Mamy

$$(1 + i)^t = k$$

a więc

$$t = \frac{\log k}{\log(1 + i)} = \frac{1}{\delta}\log k.$$

Na przykład, jeśli $i = 10\%$, to dla $k = 2$ mamy $t = 7.27$ lat, a dla $k = 10$ mamy $t = 24.16$ lat.

Jeśli δ nie jest stałe, a zależy od t, tzn. mamy funkcję $\delta(t)$ zwaną **chwilowym natężeniem oprocentowania**. Rozumując podobnie jak wyżej dostajemy równanie

$$k'(t) = \delta(t)k(t),$$

którego rozwiązaniem jest

$$k(t) = k(0)\exp\left(\int_0^t \delta(s)ds\right).$$

Obecna wartość kapitału wartego $k(t)$ w chwili t wynosi

$$k(t)\exp\left(-\int_0^t \delta(s)ds\right).$$

Procent z góry. Załóżmy, że roczna stopa procentowa wynosi i. Inwestujemy pewną kwotę C_0 i chcemy otrzymać *natychmiast* pewną jej część (powiedzmy C_0d), a po roku całą kwotę C_0. Jak uzgodnić d ze stopą i?

Jeśli procent płatny po roku wynosi C_0i, to procent z góry powinien być jego obecną wartością

$$C_0d = C_0iv.$$

Zatem

$$d = iv = \frac{i}{i+1}.$$

Wielkość d nazywamy **stopą procentową z góry**.

Inaczej można rozumować tak: Otrzymany z góry zysk C_0d można z powrotem zainwestować na takich samych zasadach, tzn. odbierając C_0d^2 teraz, a po roku C_0d. To samo możemy zrobić z C_0d^2 itd. Zatem po roku odbierzemy

$$C_0 + C_0d + C_0d^2 + \ldots = \frac{C_0}{1-d}.$$

Jeśli ta inwestycja ma być równoważna z inwestycją oprocentowaną z dołu na i, to musimy mieć

$$\frac{1}{1-d} = 1 + i,$$

a więc znowu

$$d = \frac{i}{i+1}.$$

Przy kapitalizacji m razy w ciągu roku nominalna stopa z góry wynosi

$$d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1 + \frac{i^{(m)}}{m}}.$$

2. Renty

Rentą nazywamy pewien ciąg płatności. Na razie będziemy je rozpatrywać bez żadnego związku z czasem życiem człowieka.

Rentą bezterminową nazywamy nieskończony rokroczny ciąg wypłat. Ile należy zainwestować (np. wpłacić na pewne konto), aby móc otrzymywać taką rentę? Zakładamy, że roczna efektywna stopa procentowa wynosi i.

- Załóżmy, że wypłaty mają wynosić po 1 każda, zaczynając od chwili 0 (tzw. **renta z góry**). OW takiej renty wynosi
$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + \ldots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}.$$
Istotnie, obecna wartośc wypłaty 1 po n-tym roku wynosi v^n i sumując po n od 0 do ∞ otrzymujemy powyższy wzór.
- Jeśli wypłaty są równe 1 i pierwsza ma nastąpić po pierwszym roku, (tzw. **renta z dołu**), to jej OW wynosi
$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + \ldots = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}.$$
- Jeżeli wypłaty mają następować od chwili 0, m razy w ciągu roku, po $1/m$ każda, (tzw. **m-krotna renta z góry**), to jej OW wynosi
$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} + \ldots = \frac{1}{m}\frac{1}{1-v^{1/m}} = \frac{1}{d^{(m)}}$$
- W przypadku **m-krotnej renty z dołu** (pierwsza wypłata po $1/m$-tej roku) OW wynosi
$$a^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} + \ldots = \frac{1}{m}\frac{v^{1/m}}{1-v^{1/m}} = \frac{1}{i^{(m)}}$$
- W przypadku, gdy wypłaty wynoszą 1 w chwili 0, 2 w chwili 1, 3 w chwili 2 itd. (tzw. **renta rosnąca z góry**), jej OW wynosi
$$\begin{aligned}(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|} &= 1 + 2v + 3v^2 + \ldots = (1 + v + v^2 + \ldots)' \\ &= \left(\frac{1}{1-v}\right)' = \frac{1}{(1-v)^2} = \frac{1}{d^2}.\end{aligned}$$
- Dla **renty rosnącej z dołu** (tzn. pierwsza wypłata po 1 roku) OW wynosi
$$(Ia)_{\overline{\infty}|} = v + 2v^2 + 3v^3 + \ldots = v(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{id}.$$

Rentą pewną nazywamy skończony ciąg wypłat, tzn. wypłacane do pewnej skończonej i z góry określonej chwili. Za jednostkę czasu przyjmujemy 1 rok i koniec roku n nazywamy chwilą n.

Obecne wartości rent pewnych wynoszą:

- Przy wypłatach po 1 przez n lat, dokonywanych od chwili 0 (tj. w chwilach $0, 1, \ldots, n-1$) (tzw. **renta pewna z góry**)

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d};$$

- Dla **renty pewnej z dołu** (wypłaty w chwilach $1, 2, \ldots, n$)

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \ldots + v^n = \frac{1 - v^n}{i};$$

- Dla **m-krotnej renty pewnej z góry** (wypłaty po $1/m$, m razy w roku przez n lat, od chwili 0)

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{1/m} + \ldots + \frac{1}{m}v^{(nm-1)/m}\frac{1 - v^n}{d^{(m)}};$$

- Dla **m-krotnej renty pewnej z dołu** (tak samo jak wyżej, ale od chwili $1/m$)

$$a^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{m}v^{1/m} + \ldots + \frac{1}{m}v^{nm/m}\frac{1 - v^n}{i^{(m)}}$$

Jeśli pierwsza wypłata renty następuje w chwili k, to rentę nazywamy **odroczoną**. W przypadku renty odroczonej bezterminowej OW wynosi

$$_{k|}a_{\overline{\infty}|} = v^k + v^{k+1} + \ldots = v^k a_{\overline{\infty}|} = a_{\overline{\infty}|} - a_{\overline{k}|},$$

a w przypadku odroczonej renty pewnej

$$_{k|}a_{\overline{n}|} = v^k + v^{k+1} + \ldots + v^{n+k} = v^k a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n+k}|} - a_{\overline{k}|}.$$

Możemy też rozważać **renty ciągłe**. Wyobraźmy sobie ciągły strumień wypłat o stałej intensywności $c(t) = 1$ dokonywanych od $t = 0$ do ∞ (renta ciągła **bezterminowa**). Obecna wartość takiej renty wynosi (przy założeniu stałego natężenia oprocentowania δ)

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta}.$$

Istotnie, wypłata w okresie czasu $[t, t + \Delta)$ wynosi Δ, a jej obecna wartość wynosi $\Delta \exp(-\delta t)$. Sumując OW wypłat z odcinków $[0, \Delta)$, $[\Delta, 2\Delta), \ldots$, otrzymamy szereg

$$1 \cdot \Delta + \mathrm{e}^{-\delta\Delta}\Delta + \mathrm{e}^{-2\delta\Delta}\Delta + \ldots,$$

ktoy aproksymuje powyższą całkę. W granicy gdy $\Delta \to 0$ otrzymujemy równość.

Jeżeli wypłaty dokonywane są z intensywności $c(t) = 1$, ale do chwili n (**ciągła renta pewna**), to jej OW wynosi

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n \mathrm{e}^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta}(1 - \mathrm{e}^{-\delta n}).$$

3. Przepływy pieniężne

Dokonujemy ciągu wpłat lub wypłat przez n jednakowych okresów. W roku $k = 0, 1, \ldots, n$ dokonujemy wpłaty A_k i wypłaty B_k, a więc inwestycja w roku k wynosi $C_k = A_k - B_k$. Ciąg $C_0, C_1, \ldots, C_n$ nazywamy **przepływem pieniądza**. Przy założeniu, że odsetki dopisywane są na końcu każdego roku (kapitalizacja z dołu) OW tego przepływu wynosi

$$G_n = \sum_{j=0}^{n} C_j v^j,$$

natomiast jego ZW w chwili n wynosi

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} C_j (1+i)^{n-j}.$$

Oczywiście $S_n = (1+i)^n G_n$. W dalszych rozważaniach będziemy często żądać, aby spełniony był **warunek równoważności**

$$S_n = 0.$$

Przykład 7. Bank proponuje następujący kontrakt. Osoba 55-letnia wpłaca przez 10 lat składkę roczną Π z góry, a następnie od 65 roku życia otrzymuje roczną rentę z góry przez 15 lat w wysokości 1. Obliczmy wielkość składki Π.

Mamy tu przepływ pieniądza z $n = 24$, $A_0 = \ldots = A_9 = \Pi$, $A_{10} = \ldots = A_{24} = 0$ oraz $B_0 = \ldots = B_9 = 0$, $B_{10} = \ldots = B_{24} = 1$. ZW tego przepływu wynosi

$$S_{24} = \sum_{j=0}^{9} (1+i)^{24-j} \Pi - \sum_{j=10}^{24} (1+i)^{24-j}.$$

Składkę Π obliczamy przyjmując założenie, że $S_{24} = 0$, tzn. wpłaty równoważą wypłaty oraz zakładamy, że $i = 5\%$. Stąd

$$\Pi = \frac{\sum_{j=10}^{24} v^j}{\sum_{j=0}^{9} v^j} = 0.8252.$$

Tak obliczoną składkę nazywamy **składką netto**. Obliczenia te są wykonane przy założeniu, że dana osoba przeżyje następne 24 lata. W dalszej części zobaczymy jak uwzględnić losowość długości życia człowieka przy obliczaniu składki.

Obecna wartośc OW i zakumulowana wartość ZW są szczególnymi przypadkami pojęcia **bieżącej wartośc** BW, która w chwili $k = 0, 1, \ldots, n$ wynosi

$$\sum_{j=0}^{k-1} (1+i)^{k-j} + C_k + \sum_{j=k+1}^{n} v^{j-k} C_j.$$