MODELE MATEMATYCZNE
W UBEZPIECZENIACH

WYKŁAD 6: SKŁADKI OKRESOWE

1. Składki okresowe netto

Umowę pomiędzy ubezpieczycielem a ubezpieczonym dotyczącą ubezpieczenia na życie nazywa się **polisą ubezpieczeniową**. Polisa taka zawiera szczegółowe warunki ubezpieczenia takie jak: suma ubezpieczenia, okres ważności ubezpieczenia, chwila wypłaty i ilość rat wypłaty. Z drugiej strony musi ona zawierać warunki płatności składki w danym ubezpieczeniu. Możliwe są trzy sposoby opłacenia składki:

1. pojedyncza składka, płacona jednorazowo;
2. okresowa składka płacona w ratach stałej wielkości;
3. okresowa składka płacona w ratach zmiennej wielkości.

Dla składek okresowych należy wyszczególnić częstość płacenia (np. rocznie, miesięcznie itp.) oraz ich wysokość. Z reguły składki są pobierane z góry, czyli na początku każdego okresu. Przy pobieraniu składek z góry, ubezpieczony będzie obawiał się utraty ewentualnego świadczenia, w razie zaprzestania płacenia składek. Gdyby składki były pobierane z dołu, to mogłoby się zdarzyć tak, że termin płatności kolejnej raty składki wypadłby po wypłacie świadczenia.

Jednorazowe składki netto w różnych typach ubezpieczeń na życie omówiliśmy już poprzednio. Teraz zajmiemy się wyznaczeniem wysokości okresowych składek netto. W tym celu dla danej polisy określamy wielkość **całkowitą stratę** L jako różnicę pomiędzy obecną wartością świadczenia gwarantowanego przez tę polisę, a obecną wartością przyszłych składek wpłaconych przez ubezpieczonego. Oczywiście L jest zmienną losową, która może przyjmować wartości zarówno dodatnie jak i ujemne. Zauważmy, że dodatnie wartości zmiennej L oznaczają, że ubezpieczyciel wypłaci więcej niż zebrał w postaci składek, a więc faktycznie poniesie stratę. Natomiast ujemne wartości L oznaczają, że ubezpieczyciel na danej polisie zyska.

Składkę w danej polisie nazywamy **składką netto**, jeżeli spełnia ona **warunek równoważności**

$$E(L) = 0,$$

tzn. wartość oczekiwana całkowitej straty wynosi 0.

Zauważmy, że jednorazowe składki netto wyprowadzone poprzednio spełniają warunek równoważności, gdyż dla danego typu ubezpieczenia JSN wynosi $A = E(Z)$, gdzie Z jest obecną wartością przyszłego świadczenia. Zatem $L = Z - A$, a więc $E(L) = E(Z - A) = E(Z) - A = 0$.

W dalszym ciągu wyznaczymy wysokość składek okresowych o stałej wysokości w poszczególnych typach ubezpieczeń płatnych na koniec roku śmierci. Wysokość pojedynczej składki (tzn. jednej raty składki) będziemy oznaczać literą P z odpowiednimi indeksami. Na przykład jednorazową składkę netto w ubezpieczeniu terminowym x-latka na n lat oznaczyliśmy symbolem $A^1_{x:\overline{n|}}$, a więc wysokość każdej raty okresowej składki oznaczymy symbolem $P^1_{x:\overline{n|}}$. Rozważmy najpierw przykład ilustrujący ogólną metodę wyznaczania składek.

Przykład 1. Rozważmy ubezpieczenie terminowe dla 40-latka na 10 lat na sumę C, płatną jednorazowo na koniec roku śmierci ubezpieczonego. Ubezpieczony ma opłacać składkę w wysokości Π corocznie z góry, dopóki żyje, ale nie dłużej niż 10 lat.

Niech K oznacza obcięty przyszły czas życia 40-latka. Obecna wartość świadczenia w ubezpieczeniu terminowym na 10 lat na sumę C wynosi

$$Z = C\,v^{K+1}\mathbf{1}(K < 10) = \begin{cases} C\,v^{K+1}, & \text{jeżeli } K = 0, 1, \ldots, 9 \\ 0, & \text{jeżeli } K \geqslant 10. \end{cases}$$

Z drugiej strony obecna wartość składek które wpłaci ubezpieczony wynosi

$$Y = \begin{cases} \Pi\,\ddot{a}_{\overline{K+1|}}, & \text{jeżeli } K = 0, 1, \ldots, 9, \\ \Pi\,\ddot{a}_{\overline{10|}}, & \text{jeżeli } K \geqslant 10. \end{cases}$$

Zatem strata ubezpieczyciela wynosi

$$L = \begin{cases} C\,v^{K+1} - \Pi\,\ddot{a}_{\overline{K+1|}}, & \text{jeżeli } K = 0, 1, \ldots, 9, \\ -\Pi\,\ddot{a}_{\overline{10|}}, & \text{jeżeli } K \geqslant 10. \end{cases}$$

Skoro ma zachodzić $E(L) = 0$, to musi zachodzić

$$C\,A^1_{40:\overline{10|}} - \Pi\,\ddot{a}_{40:\overline{10|}} = 0,$$

a więc

$$\Pi = C\,\frac{A^1_{40:\overline{10|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{10|}}}.$$

Załóżmy teraz na przykład, że $i = 4\%$ oraz przyszły czas życia jest zadany rozkładem de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$. Wtedy K ma rozkład jednostajny na zbiorze $\{40, 41, \ldots, 99\}$, a więc

$$\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{60}, \quad \text{dla } k = 40, 41, \ldots, 99.$$

Korzystając z odpowiednich wzorów otrzymujemy

$$A^1_{40:\overline{10|}} = \sum_{k=0}^{9} v^{k+1}\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{60}\left(v + v^2 + \ldots + v^{10}\right) = 0.1352,$$

oraz

$$A_{40:\overline{10|}}^{\,1} = v^{10}\mathrm{P}(K \geqslant 10) = \frac{5}{6}v^{10} = 0.5630.$$

Zatem

$$A_{40:\overline{10|}} = A^{1}_{40:\overline{10|}} + A_{40:\overline{10|}}^{\,1} = 0.6982$$

oraz

$$\ddot{a}_{40:\overline{10|}} = \frac{1 - A_{40:\overline{10|}}}{d} = 7.8476.$$

Ostatecznie wysokość okresowej składki wynosi

$$\Pi = 0.0172\, C.$$

Zauważmy, że podobnie jak dla jednorazowych składek netto, wysokość składki jest proporcjonalna do sumy ubezpieczenia, a więc wystarczy wyznaczać wysokość składek dla ubezpieczeń na sumę 1.

1.1. **Ubezpieczenie na całe życie.** Rozważmy najpierw ubezpieczenie x-latka na całe życie na sumę 1, płatną na koniec roku śmierci. Ubezpieczenie to ma być opłacone okresową składką płatną co roku z góry w wysokości P_x. W dalszym ciągu piszemy K zamiast K_x. Strata ubezpieczyciela wynosi

$$L = v^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K+1|}}.$$

Z warunku równoważności dostajemy równość

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

Przypomnijmy, że

$$\ddot{a}_{\overline{K+1|}} = \frac{1 - v^{K+1}}{d},$$

a więc

$$L = \left(1 + \frac{P_x}{d}\right) v^{K+1} - \frac{P_x}{d}.$$

Zatem

$$\mathrm{Var}(L) = \left(1 + \frac{P_x}{d}\right)^2 \mathrm{Var}(v^{K+1}),$$

co oznacza, że w przypadku pobierania składki rocznej ubezpieczyciel ponosi większe ryzyko niż w przypadku pobierania składki jednorazowo.

1.2. **Ubezpieczenie terminowe.** Wysokość rocznej składki netto w ubezpieczeniu x-latka, terminowym na n lat, płatnym na koniec roku śmierci, oznaczamy przez $P^1_{x:\overline{n}|}$. Strata ubezpieczyciela wynosi

$$L = \begin{cases} v^{K+1} - P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{jeżeli } K = 0, 1, \ldots, n-1, \\ -P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{jeżeli } K \geqslant n. \end{cases}$$

Zatem

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

1.3. **Ubezpieczenie na dożycie.** Oznaczmy przez $P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$ wysokość rocznej składki netto w ubezpieczeniu x-latka na dożycie na n lat na sumę 1. Strata ubezpieczyciela w takim ubezpieczeniu wynosi

$$L = \begin{cases} -P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{jeżeli } K = 0, 1, \ldots, n-1, \\ v^n - P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{jeżeli } K \geqslant n. \end{cases}$$

Zatem

$$P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

1.4. **Ubezpieczenie na życie i dożycie.** Oznaczmy przez $P_{x:\overline{n}|}$ wysokość rocznej składki netto w ubezpieczeniu x-latka na życie i dożycie na n lat na sumę 1. Podobnie jak wyżej pokazujemy, że

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

Dla jednorazowej składki w takim ubezpieczeniu mamy

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1},$$

a więc

$$P_{x:\overline{n}|} = P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}.$$

1.5. **Funkcje komutacyjne.** Ze wzorów na jednorazowe składki netto oraz wartości aktuarialne rent życiowych w terminach funkcji komutacyjnych dostajemy następujące wzory na okresowe składki netto

$$P_x = \frac{M_x}{N_x},$$

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}},$$

$$P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}},$$

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

1.6. **Składki płatne częściej niż raz do roku.** Rozważmy teraz przypadek, gdy składki nie są płacone co roku, ale częściej, tzn. m razy w ciągu roku. Wtedy do odpowiedniego symbolu składki dodajemy górny indeks (m). Wzory na składki

$$P_x^{(m)}, \quad P_{x:\overline{n}|}^{(m)}, \quad P^1_{x:\overline{n}|}{}^{(m)}, \quad P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}{}^{(m)}$$

otrzymujemy ze wzorów na składki P_x, $P_{x:\overline{n}|}$, $P^1_{x:\overline{n}|}$ i $P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ przez zastąpienie $\ddot{a}_x$ przez $\ddot{a}_x^{(m)}$ oraz $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ przez $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$. Na przykład roczna składka w ubezpieczeniu na dożycie na n lat przy płatności m razy w roku wynosi

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}{}^{(m)} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}}.$$

Zatem na początku każdego okresu ubezpieczony musi wpłacić sumę $\frac{1}{m}\, P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}{}^{(m)}$.

Zauważmy, że na przykład $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} < \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, a więc $P_{x:\overline{n}|} < P_{x:\overline{n}|}^{(m)}$. Zatem ubezpieczonemu bardziej opłaca się opłacać składkę raz do roku niż częściej. Przy opłatach m-krotnych, ubezpieczony będzie musiał zapłacić więcej w ciągu każdego roku.

1.7. **Składki w ubezpieczeniach płatnych w chwili śmierci.** Rozważmy następującą polisę ubezpieczeniową: x-latek ubezpiecza się na całe życie na sumę 1 płatną w chwili śmierci. Składka opłacana jest rentą dożywotnią coroczną z góry w wysokości $P(\bar{A}_x)$. Oznaczmy dla uproszczenia $T = T_x$ i $K = K_x$. Strata ubezpieczyciela wynosi

$$L = v^T - P(\bar{A}_x)\, \ddot{a}_{\overline{K+1}|},$$

a więc

$$P(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}.$$

Podobnie, jeżeli składka opłacana jest w postaci m rat, to roczna składka wynosi

$$P^{(m)}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}.$$

Oczywiście wysokość każdej raty wynosi $\frac{1}{m}P^{(m)}(\bar{A}_x)$.

Analogicznie można pokazać, że

$$P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}};$$

$$P(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

Uwaga. $\bar{P}(\bar{A}_x)$ oznacza wysokość rocznej składki w ubezpieczeniu na całe życie płatnym w chwili śmierci, przy czym składki są płacone w sposób **ciągły**. Podobne znaczenie ma $\bar{P}$ w symbolach $\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})$ i $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$.

1.8. **Składki płatne przez okres krótszy niż okres ubezpieczenia.** Rozważmy na koniec następującą polisę: x-latek ubezpiecza się na całe życie na sumę 1, płatną na koniec roku śmierci. Składka opłacana jest okresowo co roku z góry, ale przez co najwyżej h lat. Wysokość takiej składki oznaczymy przez ${}_hP_x$.

Zauważmy, że strata ubezpieczyciela wynosi

$$L = \begin{cases} v^{K+1} - {}_hP_x\, \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{jeżeli } K = 0, 1, \ldots, h-1, \\ v^{K+1} - {}_hP_x\, \ddot{a}_{\overline{h}|}, & \text{jeżeli } K \geqslant h. \end{cases}$$

Zatem z zasady równoważności

$${}_hP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}.$$

Analogicznie wyprowadzamy następujące wzory, prawdziwe dla $h = 1, 2, \ldots, n$

$${}_hP^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}};$$

$${}_hP_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}};$$

$${}_hP_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}.$$

2. Składki okresowe brutto

Do tej pory wyznaczaliśmy wysokość składek netto. Podstawą wyznaczania składek netto była zasada równoważności: oczekiwana wartość obecna przyszłych świadczeń ma być równa oczekiwanej wartości obecnej przyszłych składek. Zatem wyznaczając wysokość składek netto nie uwzględniamy żadnych kosztów prowadzenia działalności ubezpieczeniowej. Teraz pokażemy jak powiększyć składki netto, aby uwzględnić te koszty. Składki takie nazywać będziemy **składkami brutto**.

2.1. **Klasyfikacja kosztów.** Koszty ponoszone przez ubezpieczyciela można podzielić na trzy zasadnicze grupy:

Koszty akwizycji: Są to koszty związane z wystawieniem nowej polisy, np.:
- koszty pozyskania klienta (reklama, badanie rynku itp.);
- prowizja dla agenta, koszty jego podróży itp.;
- badanie medyczne potencjalnego klienta;
- wypisanie polisy.

Koszty te są ponoszone jednorazowo i zakładamy, że są one proporcjonalne do sumy ubezpieczenia. Współczynnik tej proporcjonalności oznaczamy przez α.

Koszty pobierania składki: Te koszty są ponoszone tylko na początku każdego roku pobierania składek. Zakładamy, że koszty te są proporcjonalne do aktualnie pobieranej składki brutto. Współczynnik tej proporcjonalności oznaczymy przez β.

Koszty administracyjne: W tej grupie znajdują się wszystkie pozostałe rodzaje kosztów:
- wynagrodzenia pracowników;
- koszty wynajmu pomieszczeń;
- koszty przetwarzania informacji (usługi informatyczno-telekomunikacyjne);
- koszty realizacji nowych inwestycji;
- podatki i koszty licencji na działalność ubezpieczeniową.

Koszty administracyjne są pobierane przez cały okres ważności polisy w wysokości proporcjonalnej do sumy ubezpieczenia. Współczynnik tej proporcjonalności oznaczamy przez γ.

2.2. **Wyznaczanie składek brutto. Składką brutto** nazywamy poziom składki P^{br} taki, który przeciętnie wystarczy na pokrycie przyszłych świadczeń z tytułu ubezpieczenia oraz wszystkich kosztów wymienionych w powyżej. Zatem

$$P^{\mathrm{br}} = P + P^{\alpha} + P^{\beta} + P^{\gamma},$$

gdzie P oznacza składkę netto, a pozostałe składniki po prawej stronie oznaczają te części składki, które mają zrównoważyć w sensie aktuarialnym wydatki ponoszone w poszczególnych kategoriach. Oznacza to, że składkę brutto wyznaczamy z następującego warunku równoważności:

$$\text{OWA składki brutto} = \text{OWA przyszłego świadczenia} + \text{OWA kosztów}$$

Przykład 2. Jako pierwszy przykład rozważmy składki brutto $P^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|}$ w ubezpieczeniu na życie i dożycie na sumę 1 dla x-latka na n lat. Wtedy OWA przyszłych składek brutto wynosi $P^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. Z drugiej strony
- OWA przyszłego świadczenia (czyli JSN) wynosi $A_{x:\overline{n}|}$;
- koszty akwizycji wynoszą α;
- OWA kosztów poboru składki wynosi $\beta P^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$;
- OWA kosztów administracyjnych wynosi $\gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$.

Zatem $P^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|}$ wyznaczamy z równości

$$P^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta P^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}. \qquad (*)$$

Stąd

$$P^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Ale $A_{x:\overline{n}|} + d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1$, a więc

$$P^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|} = \frac{1+\alpha}{1-\beta}P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha d + \gamma}{1-\beta}$$

Natomiast dzieląc równanie $(*)$ stronami przez $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ otrzymujemy

$$P^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \beta P^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|} + \gamma,$$

a więc

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}, \quad P^{\beta} = \beta P^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|}, \quad P^{\gamma} = \gamma.$$

Przykład 3. Jako drugi przykład rozważmy składki brutto ${}_mP^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|}$ w ubezpieczeniu na życie i dożycie na sumę 1 dla x-latka na n lat, ale z okresem płacenia składek równym $m \leqslant n$. Wtedy wszystkie koszty są takie same jak wyżej z wyjątkiem kosztów poboru składki, których OWA wynosi tym razem $\beta {}_mP^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$. Zatem ${}_mP^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|}$ wyznaczamy z równości

$${}_mP^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta {}_mP^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{n}|}, \qquad (**)$$

a więc tym razem

$${}_mP^{\mathrm{br}}_{x:\overline{n}|} = \frac{1+\alpha}{1-\beta} {}_mP_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha d + \gamma}{1-\beta} \cdot \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}.$$