MODELE MATEMATYCZNE
W UBEZPIECZENIACH

WYKŁAD 5: RENTY ŻYCIOWE

Rentą życiową nazywamy ciąg płatności, który ustaje w chwili śmierci pewnej osoby (zwykle ubezpieczonego). Mówiąc o rencie życiowej nie zaznaczamy, czy osoba, której przyszły czas życia wyznacza koniec renty, odbiera płatności (jest rentobiorcą), czy też dokonuje płatności (jest rentodawcą). Możliwe są bowiem obydwa przypadki. Zwykle renta życiowa kojarzona jest z sytuacją, gdy firma ubezpieczeniowa wypłaca świadczenia (np. emeryturę) do końca jej życia. Ale z matematycznego punktu widzenia z taką sama sytuacją mamy do czynienia, gdy ubezpieczony opłaca okresową składką jakieś świadczenie (tzn. zamiast opłacać składkę za jakieś ubezpieczenie jednorazowo, płaci ją w ratach).

Często spotykana jest sytuacja, że najpierw dana osoba opłaca składkę okresowo, a potem odbiera świadczenie, również okresowo. Śmierć przerywa obie te renty i w umowie jest zwykle powiedziane, czy towarzyszy temu jakaś wypłata czy nie.

Renta życiowa jest zatem rentą terminową, ale o losowym czasie trwania, zależnym od przyszłego czasu życia osoby. Ze względu na czas objęty umową wyróżniamy następujące rodzaje renty życiowej:

- **dożywotnia**, gdy ciąg płatności zaczyna się z chwilą zawarcia umowy i trwa do śmierci danej osoby;
- **terminowa**, gdy czas objęty rentą jest ograniczony, tzn. po ustalonym czasie płatność ustaje, nawet jeśli dana osoba żyje;
- **odroczona**, gdy ciąg płatności nie rozpoczyna się z chwilą zawarcia umowy, ale po pewnym czasie, jeśli dana osoba żyje.

Wypłaty mogą być dokonywane:

- ciągle, z pewną intensywnością (model raczej teoretyczny);
- okresowo (np. rocznie, kwartalnie, miesięcznie); przy tym płatność może przypadać na początku każdego okresu (**renta życiowa z góry**), lub na koniec okresu (**renta życiowa z dołu**).

Będziemy teraz obliczać obecną wartość Y ciągu płatności jaki stanowi renta życiowa. Podstawowym pojęciem będzie znowu wartość oczekiwana $a = EY$, zwana **jednorazową składką netto renty** lub po prostu **obecną wartością aktuarialną** (OWA). Jeżeli rozważamy renty o stałych płatnościach, to zwykle przyjmujemy, że roczna suma wypłat wynosi 1. Renty o wyższych płatnościach można traktować jako wielokrotności rent jednostkowych.

1. Renty płatne dyskretnie

Niech K_x oznacza obcięty przyszły czas życia x-latka. Rozważmy najpierw ogólną rentę życiową płatną raz w roku, tzn. w chwilach $k = 0, 1, 2, \ldots, K_x$. Załóżmy, że z tytułu takiej renty kolejne wypłaty wynoszą $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Obecna wartość takiej renty wynosi

$$Y = \sum_{k=0}^{K_x} c_k v^k,$$

a jej obecna wartość aktuarialna wynosi

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v^k {}_k p_x.$$

Istotnie

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{k=0}^{K_x} c_k v^k\right) &= E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}(k \leqslant K_x) c_k v^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\mathbf{1}(k \leqslant K_x) c_k v^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v^k {}_k p_x. \end{aligned}$$

1.1. **Renta życiowa bezterminowa.** Jeżeli nie będzie to prowadzić do nieporozumień, to dla uproszczenia będziemy czasem pisać K zamiast K_x.

Rozważmy najpierw przypadek renty płatnej z góry. Osoba w wieku x płaci teraz 1, za rok 1, i tak dalej, aż do śmierci. Wartość obecna tego ciągu wypłat wynosi

$$Y = 1 + v + v^2 + \ldots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|},$$

gdzie dla $n \in \mathbb{N}$, $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ oznacza obecną wartość renty pewnej z góry na n lat. Przypomnijmy, że

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d},$$

gdzie $d = \frac{i}{i+1}$ oznacza stopę procentową z góry.

Obecna wartość aktuarialna takiej renty wynosi

$$\ddot{a}_x = EY = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} {}_k p_x q_{x+k}.$$

Korzystając z powyższego wzoru mamy

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x.$$

Przypomnijmy, że $Z = v^{K+1}$ jest obecną wartością w bezterminowym ubezpieczeniu na życie. Zatem obliczając wartość oczekiwaną po obu stronach równości

$$Y = \frac{1 - v^{K+1}}{d} = \frac{1 - Z}{d}$$

dostajemy następujący związek pomiędzy wartością aktuarialną renty życiowej i ubezpieczenia bezterminowego

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d},$$

lub równoważnie

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x.$$

Wzór ten ma następującą interpretację: Zaciągamy dług w wysokości 1. Jego spłaty dokonujemy następująco: na początku każdego roku spłacamy odsetki od sumy 1 z góry oraz wykupujemy polisę na całe życie na sumę 1. Spłaty długu dokona ubezpieczyciel w rok po naszej ostatniej racie odsetek (czyli na koniec roku śmierci).

Dla renty życiowej z dołu, wartość obecna wynosi

$$Y = v + v^2 + \ldots + v^K = a_{\overline{K}|},$$

gdzie

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d},$$

jest obecną wartością renty pewnej z dołu na n lat. Zatem OW tej renty jest o 1 mniejsza niż renty z góry. Stąd OWA renty z dołu

$$a_x = \ddot{a}_x - 1.$$

1.2. **Renta życiowa czasowa.** Renta życiowa n-letnia polega na dokonywaniu wpłaty 1 na początku każdego roku, przez kolejnych n lat. Osoba x-letnia dokonuje pierwszej wpłaty natychmiast, a ostatniej (ewentualnie) w wieku $x + n - 1$. Jeśli osoba ta umrze przed osiągnięciem tego wieku , to płatność ustaje. Obecna wartość takiej renty wynosi

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{jeżeli } K < n, \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{jeżeli } K \geqslant n. \end{cases}$$

Zatem OWA takiej renty wynosi

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{k+1\,k}p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k{}_kp_x.$$

Zauważmy, że podobnie jak dla renty dożywotniej

$$Y = \frac{1 - Z}{d},$$

gdzie Z oznacza OW ubezpieczenia na życie i dożycie na sumę 1. Zatem

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}.$$

1.3. **Renty życiowe odroczone.** Najlepszy przykład takiej renty to emerytura. Aktywny zawodowo x-latek otrzymuje obietnicę corocznych świadczeń w wysokości 1, które będą mu wypłacane począwszy od wieku $x+m$ (najczęściej $x+m=65$).

OW renty bezterminowej odroczonej o m lat wynosi

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } K < m, \\ v^m + v^{m+1} + \ldots + v^K, & \text{jeżeli } K \geqslant m. \end{cases}$$

Zatem OWA takiej renty wynosi

$$_{m|}\ddot{a}_x = EY = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

lub

$$_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^k {}_k p_x.$$

Zauważmy, że

$$_{m|}\ddot{a}_x = {}_m p_x v^m \ddot{a}_{x+m},$$

gdyż

$$\begin{aligned} {}_{m|}\ddot{a}_x &= \sum_{k=m}^{\infty} v^k {}_k p_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+m} {}_{k+m} p_x \\ &= v^m \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_m p_x {}_k p_{x+m} = v^m {}_m p_x \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_{x+m} \\ &= v^m {}_m p_x \ddot{a}_{x+m}. \end{aligned}$$

1.4. **Renty płatne częściej niż raz do roku.** Zwykle renty są otrzymywane lub płacone częściej niż raz do roku. Załóżmy, że płatności są dokonywane m razy w ciągu roku po $\frac{1}{m}$ każda, na początku każdego podokresu (z góry).

Dla takiej renty bezterminowej mamy przy założeniu HU wzór

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m),$$

gdzie

$$\alpha(m) = \frac{di}{d^{(m)} i^{(m)}}, \quad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)} i^{(m)}}.$$

Można również korzystać z przybliżeń

$$\alpha(m) \approx 1, \quad \beta(m) \approx \frac{m-1}{2m}.$$

Dla rent terminowych z wypłatami m razy w ciągu roku zachodzi wzór

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - v^n {}_n p_x).$$

1.5. **Funkcje komutacyjne.** Wartości aktuarialne rent życiowych również można zapisać przy pomocy funkcji komutacyjnych. Mianowicie, określmy

$$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k},$$

gdzie $D_x = v^x l_x$, oraz

$$S_x = \sum_{k=0}^{\infty} N_{x+k}.$$

Wtedy

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x},$$

oraz

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x},$$

a więc

$${}_{n|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}.$$

Istotnie,

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k} l_{x+k} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k} = \frac{N_x}{D_x}.$$

Dalej

$${}_{n|}\ddot{a}_x = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \ddot{a}_{x+n} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}} = \frac{N_{x+k}}{D_x}.$$

Przykład 1. Pan Grosik ma 35 lat i chce zacząć odkładać 50 PLN miesięcznie w prywatnym funduszu emerytalnym. Jakiego dodatku do emerytury może się spodziewać po dożyciu do wieku emerytalnego 65 lat?

Rozwiązanie. Niech x oznacza szukany miesięczny dodatek. Musimy porównać wartości aktuarialne wpłaconych składek i wypłaconych w przyszłości świadczeń. Zatem

$$12 \cdot 50 \cdot \ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{30}|} = 12 \cdot x \cdot {}_{30|}\ddot{a}^{(12)}_{35}.$$

Aby obliczyć $\ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{30}|}$ korzystamy ze wzoru

$${}_{n|}\ddot{a}^{(m)}_x = {}_n p_x v^n \, \ddot{a}^{(m)}_{x+n} = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \, \ddot{a}^{(m)}_{x+n},$$

czyli

$${}_{30|}\ddot{a}^{(12)}_{35} = A_{35:\overset{1}{\overline{30}|}} \, \ddot{a}^{(12)}_{65}.$$

Mamy

$$A_{35:\overset{1}{\overline{30}|}} = \frac{D_{65}}{D_{35}} = \frac{5107.77}{24266.77} = 0.21038.$$

Dalej

$$\ddot{a}^{(12)}_{65} = \alpha(12)\ddot{a}_{65} - \beta(12),$$

gdzie

$$\alpha(m) \approx 1, \quad \beta(m) \approx \frac{m-1}{2m} = \frac{11}{24} = 0.458,$$

oraz

$$\ddot{a}_{65} = \frac{N_{65}}{D_{65}} = \frac{51349.14}{5107.77} = 10.05314.$$

Zatem $\ddot{a}_{65}^{(12)} = 9.595$ oraz

$${}_{30|}\ddot{a}_{35}^{(12)} = 2.029.$$

Aby obliczyć $\ddot{a}_{35:\overline{30|}}^{(12)}$ korzystamy ze wzoru

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \beta(m)(1 - A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1}),$$

a więc

$$\ddot{a}_{35:\overline{30|}}^{(12)} = \ddot{a}_{35:\overline{30|}} - \beta(12)(1 - A_{35:\overline{30|}}^{\;\;\;1}).$$

Obliczamy

$$\ddot{a}_{35:\overline{30|}} = \frac{N_{35} - N_{65}}{D_{35}} = \frac{454220.22 - 51349.14}{24226.77} = 16.63.$$

Stąd $\ddot{a}_{35:\overline{30|}}^{(12)} = 16.27$ oraz

$$x = \frac{50 \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30|}}^{(12)}}{{}_{30|}\ddot{a}_{35}^{(12)}} = 400.93.$$