MODELE MATEMATYCZNE
W UBEZPIECZENIACH

WYKŁAD 2: RENTY. PRZEPŁYWY PIENIĘŻNE. TRWANIE ŻYCIA

1. Renty

Rentą nazywamy pewien ciąg płatności. Na razie będziemy je rozpatrywać bez żadnego związku z czasem życiem człowieka.

Rentą bezterminową nazywamy nieskończony rokroczny ciąg wypłat. Ile należy zainwestować (np. wpłacić na pewne konto), aby móc otrzymywać taką rentę? Zakładamy, że roczna efektywna stopa procentowa wynosi i.

- Załóżmy, że wypłaty mają wynosić po 1 każda, zaczynając od chwili 0 (tzw. **renta z góry**). OW takiej renty wynosi

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + \ldots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}.$$

  Istotnie, obecna wartośc wypłaty 1 po n-tym roku wynosi v^n i sumując po n od 0 do ∞ otrzymujemy powyższy wzór.

- Jeśli wypłaty są równe 1 i pierwsza ma nastąpić po pierwszym roku, (tzw. **renta z dołu**), to jej OW wynosi

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + \ldots = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}.$$

- Jeżeli wypłaty mają następować od chwili 0, m razy w ciągu roku, po $1/m$ każda, (tzw. **m-krotna renta z góry**), to jej OW wynosi

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} + \ldots = \frac{1}{m}\frac{1}{1-v^{1/m}} = \frac{1}{d^{(m)}}$$

- W przypadku **m-krotnej renty z dołu** (pierwsza wypłata po $1/m$-tej roku) OW wynosi

$$a^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} + \ldots = \frac{1}{m}\frac{v^{1/m}}{1-v^{1/m}} = \frac{1}{i^{(m)}}$$

Rentą pewną nazywamy skończony ciąg wypłat, tzn. wypłacane do pewnej skończonej i z góry określonej chwili. Za jednostkę czasu przyjmujemy 1 rok i koniec roku n nazywamy chwilą n.

Obecne wartości rent pewnych wynoszą:

- Przy wypłatach po 1 przez n lat, dokonywanych od chwili 0 (tj. w chwilach $0, 1, \ldots, n-1$) (tzw. **renta pewna z góry**)
$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d};$$
- Dla **renty pewnej z dołu** (wypłaty w chwilach $1, 2, \ldots, n$)
$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \ldots + v^n = \frac{1 - v^n}{i};$$
- Dla **m-krotnej renty pewnej z góry** (wypłaty po $1/m$, m razy w roku przez n lat, od chwili 0)
$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{1/m} + \ldots + \frac{1}{m}v^{(nm-1)/m} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}};$$
- Dla **m-krotnej renty pewnej z dołu** (tak samo jak wyżej, ale od chwili $1/m$)
$$a^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{m}v^{1/m} + \ldots + \frac{1}{m}v^{nm/m} = \frac{1 - v^n}{i^{(m)}}$$

Jeśli pierwsza wypłata renty następuje w roku k, to rentę nazywamy **odroczoną**.

Na przykład, w przypadku odroczonej o k lat renty bezterminowej z góry OW wynosi
$$_{k|}\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = v^k + v^{k+1} + \ldots = v^k a_{\overline{\infty}|},$$
lub inaczej
$$_{k|}\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - \ddot{a}_{\overline{k}|},$$
a w przypadku renty pewnej z dołu na n lat odroczonej o k lat
$$_{k|}a_{\overline{n}|} = v^{k+1} + v^{k+1} + \ldots + v^{n+k} = v^k a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n+k}|} - a_{\overline{k}|}.$$
Podobne zależności zachodzą dla odroczonych rent m-krotnych. Na przykład
$$_{k|}\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = v^k \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}$$

2. Przepływy pieniężne

Dokonujemy ciągu wpłat lub wypłat przez n jednakowych okresów. W roku $k = 0, 1, \ldots, n$ dokonujemy wpłaty A_k i wypłaty B_k, a więc inwestycja w roku k wynosi $C_k = A_k - B_k$. Ciąg $C_0, C_1, \ldots, C_n$ nazywamy **przepływem pieniądza**. Przy założeniu, że odsetki dopisywane są na końcu każdego roku (kapitalizacja z dołu) OW tego przepływu wynosi
$$G_n = \sum_{j=0}^{n} C_j v^j,$$
natomiast jego ZW w chwili n wynosi
$$S_n = \sum_{j=0}^{n} C_j (1+i)^{n-j}.$$

Oczywiście $S_n = (1+i)^n G_n$. W dalszych rozważaniach będziemy często żądać, aby spełniony był **warunek równoważności**

$$S_n = 0.$$

Przykład 1. Bank proponuje następujący kontrakt. Osoba 55-letnia wpłaca przez 10 lat składkę roczną Π z góry, a następnie od 65 roku życia otrzymuje roczną rentę z góry przez 15 lat w wysokości 1. Obliczmy wielkość składki Π.

Mamy tu przepływ pieniądza z $n = 24$, $A_0 = \ldots = A_9 = \Pi$, $A_{10} = \ldots = A_{24} = 0$ oraz $B_0 = \ldots = B_9 = 0$, $B_{10} = \ldots = B_{24} = 1$. ZW tego przepływu wynosi

$$S_{24} = \sum_{j=0}^{9}(1+i)^{24-j}\Pi - \sum_{j=10}^{24}(1+i)^{24-j}.$$

Składkę Π obliczamy przyjmując założenie, że $S_{24} = 0$, tzn. wpłaty równoważą wypłaty oraz zakładamy, że $i = 5\%$. Stąd

$$\Pi = \frac{\sum_{j=10}^{24} v^j}{\sum_{j=0}^{9} v^j} = 0.8252.$$

Tak obliczoną składkę nazywamy **składką netto**. Obliczenia te są wykonane przy założeniu, że dana osoba przeżyje następne 24 lata. W dalszej części zobaczymy jak uwzględnić losowość długości życia człowieka przy obliczaniu składki.

3. Przyszły czas życia

3.1. **Oznaczenia i definicje.** Osobę, która ukończyła x lat życia, będziemy nazywać x-latkiem i oznaczać symbolem (x). Jej **przyszły czas życia**, tzn. od chwili x do chwili śmierci, będziemy oznaczać przez T_x. Wartości T_x są nieujemne, ale nie muszą być całkowite!

Oczywiście T_x dla danej osoby (x) żyjącej nie jest znane. Zakładamy zatem, że T_x jest zmienną losową i że dany jest jej rozkład (dystrybuanta)

$$F_x(t) = \mathrm{P}(T_x \leqslant t), \quad t \geqslant 0.$$

Inaczej, $F_x(t)$ jest prawdopodobieństwem, że x-latek umrze przed upływem czasu t, tzn. przed chwilą $x + t$. Będziemy zawsze zakładać, że F_x ma gęstość f_x, tzn. że dla dowolnych $0 \leqslant a \leqslant b$

$$\mathrm{P}(a \leqslant T_x \leqslant b) = \int_a^b f_x(t)dt,$$

lub równoważnie

$$F_x'(t) = f_x(t)$$

dla prawie wszystkich t.

Przez s_x oznaczymy **funkcję przeżycia**

$$s_x(t) = \mathrm{P}(T_x > t) = \int_x^\infty f_x(t)dt.$$

Będziemy używać następujących oznaczeń:

- prawdopodobieństwo, że (x) umrze przed upływem czasu t
$$ {}_tq_x = F_x(t); $$
- prawdopodobieństwo, że (x) przeżyje jeszcze t lat
$$ {}_tp_x = 1 - F_x(t) = s_x(t); $$
Oczywiście ${}_tq_x + {}_tq_x = 1$.
- prawdopodobieństwo, że (x) przeżyje jeszcze s lat, a następnie umrze w ciągu czasu t
$$ \begin{aligned} {}_{s|t}q_x &= \mathrm{P}(s < T_x \leqslant s+t) \\ &= F_x(s+t) - F_x(s) \\ &= {}_{s+t}q_x - {}_sq_x = {}_sp_x - {}_{s+t}p_x; \end{aligned} $$
- prawdopodobieństwo, że (x) przeżyje kolejne t lat, pod warunkiem, że przeżyje najpierw co najmniej s lat
$$ \begin{aligned} {}_tp_{[x]+s} &= \mathrm{P}(T_x > s+t \mid T_x > s) = \\ &= \frac{1 - F_x(s+t)}{1 - F_x(s)} = \frac{{}_{s+t}p_x}{{}_sp_x}, \end{aligned} $$
oraz
- przeciwne prawdopodobieństwo warunkowe
$$ \begin{aligned} {}_tq_{[x]+s} &= \mathrm{P}(T_x \leqslant s+t \mid T_x > s) = \\ &= \frac{F_x(s+t) - F_x(s)}{1 - F_x(s)} = \frac{{}_{s|t}q_x}{{}_sp_x}. \end{aligned} $$

Uwaga. Jeżeli jakiś indeks jest równy 1, to można go pominąć, np.
$$ {}_1p_x = p_x, \quad {}_{t|1}q_x = {}_{t|}q_x. $$

Przykład 2. Niech $x = 50$, $t = 5$ oraz $s = 10$. Wtedy:

- $q_x = q_{50}$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba 50 letnia umrze w ciągu kolejnego roku;
- $p_x = p_{50}$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba 50-letnia przeżyje kolejny rok;
- ${}_tq_x = {}_5q_{50}$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba 50–letnia umrze przed osiągnięciem 55 lat;
- ${}_tp_x = {}_5p_{50}$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba 50–letnia dożyje wieku 55 lat;
- ${}_{s|t}q_x = {}_{10|5}q_{50}$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba 50–letnia umrze pomiędzy 60 a 65 rokiem życia;
- ${}_tq_{[x]+s} = {}_5q_{[50]+10}$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba 50–letnia umrze przed osiągnięciem 65 lat, pod warunkiem, że dożyła ona 60 lat.

- ${}_tp_{[x]+s} = {}_5p_{[50]+10}$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba 50–letnia dożyje wieku 65 lat, pod warunkiem, że dożyła ona 60 roku życia;

Uwaga. ${}_tp_{x+s} = {}_5p_{60}$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba 60–letnia dożyje 65 roku życia. Jest to na ogół inne prawdopodobieństwo niż ${}_tp_{[x]+s} = {}_5p_{[50]+10}$, chociaż na pierwszy rzut oka mówią one o tym samym: w obydwu przypadkach chodzi o przeżycie od 60 do 65 roku życia. Ale dotyczą one różnych populacji: ${}_5p_{60}$ dotyczy 60-latków, a ${}_5p_{[50]+10}$ dotyczy 50-latków.

Zachodzą następujące równości

$$
\begin{aligned}
{}_{s+t}p_x &= {}_sp_x \, {}_tp_{[x]+s} \\
{}_{s|t}q_x &= {}_sp_x \, {}_tq_{[x]+s},
\end{aligned}
$$

a więc

$$
{}_kp_x = p_x \prod_{i=1}^{k-1} p_{[x]+i}.
$$

Wartością oczekiwaną przyszłego czasu życia T_x nazywamy

$$
\mathring{e}_x = ET_x = \int_0^\infty t f_x(t) dt.
$$

Zakładamy, że $\mathring{e}_x < \infty$ dla każdego x. Zauważmy, że

$$
f_x(t) = -\frac{d({}_tp_x)}{dt},
$$

a więc całkując przez części

$$
\mathring{e}_x = [-t \, {}_tp_x]_0^\infty + \int_0^\infty {}_tp_x dt.
$$

Ostatecznie

$$
\mathring{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x dt.
$$

Natężeniem śmiertelności x-latka w chwili t liczonego od chwili obecnej (tzn. w chwili $x+t$) nazywamy wielkość

$$
\mu_{[x]+t} = \frac{f_x(t)}{1 - F_x(t)}.
$$

Rozważmy prawdopodobieństwo warunkowe śmierci (x) w krótkim przedziale czasu $[t, t+h]$ pod warunkiem, że (x) przeżyje do czasu t

$$
{}_hq_{[x]+t} = \mathrm{P}(T_x \leqslant t + h \mid T_x > t) = \frac{F_x(t+h) - F_x(t)}{1 - F_x(t)}.
$$

Na mocy twierdzenia o wartości średniej mamy

$$
F_x(t+h) - F_x(t) = h f_x(t + \theta h),
$$

dla pewnego $\theta \in [0,1]$, a więc

$$\frac{{}_hq_{[x]+t}}{h} = \frac{f_x(t+\theta h)}{1-F_x(t)}.$$

Jeżeli gęstość jest ciągła w p-cie t, to dostajemy

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{{}_hq_{[x]+t}}{h} = \mu_{[x]+t}$$

Zatem prawdopodobieństwo śmierci x-latka w krótkim przedziale czasu $[t, t+h]$ jest proporcjonalne do długości tego przedziału ze współczynnikiem proporcjonalności $\mu_{[x]+t}$.

Dalej zauważmy, że

$$\mu_{[x]+t} = -\frac{1}{{}_tp_x}\frac{d({}_tp_x)}{dt} = -\frac{d(\log {}_tp_x)}{dt}$$

a więc

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{[x]+s}ds\right)$$

oraz

$$F_x(t) = \int_0^t {}_sp_x\, \mu_{[x]+s}ds.$$

Inaczej mówiąc natężenie śmiertelności wyznacza rozkład przyszłego czasu życia.

Obciętym czasem życia nazywamy zmienną losową

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor,$$

gdzie $\lfloor a \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej a, czyli największą liczbę całkowitą niewiększą niż a. Inaczej $\lfloor a \rfloor = k$ wtedy, i tylko wtedy, gdy

$$k \leqslant a < k+1.$$

Zatem K_x oznacza liczbę ukończonych przyszłych lat życia x-latka. Funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej K_x dana jest wzorem

$$\mathrm{P}(K_x = k) = \mathrm{P}(k \leqslant T_x < k+1) = {}_{k|1}q_x = {}_kp_x\, q_{[x]+k}.$$

Zatem **oczekiwany obcięty przyszły czas życia** jest dany wzorem

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{P}(K_x = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, {}_kp_x\, q_{[x]+k}.$$

K_x jest zmienną losową o wartościach całkowitych nieujemnych, a więc jej wartość oczekiwaną można również obliczyć ze wzoru

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(K \geqslant k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x.$$