MODELE MATEMATYCZNE
W UBEZPIECZENIACH

WYKŁAD 1: UWAGI WSTĘPNE. PROCENT SKŁADANY

1. Uwagi wstępne

Ryzyko jest związane z niemalże każdym rodzajem działalności człowieka:

- przy planowaniu urlopu – ryzyko słabej pogody;
- przy wyjściu do kina – ryzyko braku wolnych miejsc;
- gdy facet się oświadcza dziewczynie – ryzyko odmowy.

Wiele ryzyk pociąga za sobą straty ekonomiczne:

- pożar domu – koszty remontu;
- kradzież samochodu – koszt zakupu nowego, itp.

Ubezpieczenie jest (częściową) ochroną przed niepewnością, ryzykiem.

- Ubezpieczenie jest to kontrakt (*polisa*) pomiędzy firmą ubezpieczeniową (*ubezpieczyciel*), a wykupującym polisę (*ubezpieczającym*).
- Ubezpieczający płaci firmie określoną ilość pieniędzy (*składkę*), aby ochronić się przed ryzykiem związanym z pewnym, ściśle określonym zdarzeniem losowym.
- Ubezpieczyciel zobowiązuje się, że w razie zajścia tego zdarzenia i poniesienia szkody przez ubezpieczającego się, wypłaci ekonomiczną rekompensatę straty (*odszkodowanie*).

W chwili zawarcia umowy ani ubezpieczyciel, ani ubezpieczający nie wiedzą:

- czy określone zdarzeni nastąpi;
- kiedy ono nastąpi;
- jaką stratę spowoduje.

Zatem sprzedając polisę ubezpieczyciel przejmuje na siebie ryzyko od kupującego polisę, który z kolei zmniejsza swoje ryzyko. Niepewność i ryzyko to podstawa ubepieczeń. Gdyby nie było niepewności co do przyszłości, nie byłoby sensu ubezpieczania.

W ubezpieczeniach ważną rolę odgrywają modele stochastyczne, które pomagaja odpowiedzieć na następujące pytania:

- Jak wyznaczyć wysokość składki?
- Jaki poziom rezerw potrzebny jest firmie ubezpieczeniowej?
- Czy należy się reasekurować?

Podstawowy podział ubezpieczeń:

- *life* (na życie);
- *non-life* (pozostałe osobowe i majątkowe).

Ubezpieczenia na życie są to kontrakty zapewniające pokrycie finansowych potrzeb wynikłych wskutek zdarzeń w życiu człowieka, takich jak:

- choroba;
- kalectwo;
- dożycie do pewnego okresu (ryzyko długowieczności);
- śmierć (ryzyko przedwczesnej śmierci).

Ubezpieczenia non-life dotyczą:

- osób (wypadki, choroby, itp.);
- własności (przeciwpożarowe, przeciwłamaniowe, samochodowe, itp.);
- zysków (oszustwo, odpowiedzialność cywilna).

2. Procent składany i ciągły

Stopa procentowa i jest związana z podstawową jednostką czasu, jaką jest zwykle jeden rok. Jeśli pożyczamy komuś 100 zł na jeden rok, a po upływie tego czasu osoba ta oddaje 110 zł, to stopa procentowa i takiej opreacji wynosi

$$i = \frac{110 - 100}{100} = 0.1 = 10\%,$$

a odsetki wynoszą $110 - 100 = 10$ zł.

Zawsze zakładamy, że $i > 0$.

Okres kapitalizacji to czas, co który odpowiedni procent (odsetki) jest doliczany do kapitału. Możliwe są dwie *metody kapitalizacji*:

- z góry (na początku każdego okresu);
- z dołu (na końcu każdego okresu).

Na przykład przy lokacie bankowej na 1 rok możliwe jest dopisanie odsetek na upływie całości tego okresu lub po upływie każdego kwartału, miesiąca itp.

Jeśli okres kapitalizacji jest równy podstawowej jednostce czasu, to mówimy o **kapitalizacji zgodnej**, a stopę procentową i nazywamy **efektywną**.

Przykład 1. Pożyczamy komuś 100 zł na jeden rok na $i = 10\%$ z rocznym okresem kapitalizacji. Jeśli spłata została odroczona, to dług rośnie następująco:

$$\begin{array}{rl} \text{po roku} & 100 \cdot (1 + 0.1) = 110 \\ \text{po 2 latach} & 110 \cdot (1 + 0.1) = 100 \cdot (1 + 0.1)^2 = 121 \\ \text{po 3 latach} & 121 \cdot (1 + 0.1) = 100 \cdot (1 + 0.1)^3 = 133.1 \text{ itd.} \end{array}$$

Ogólnie, jeżeli zainwestowano kapitał C_0 z efektywną stopą procentową i, to po n latach otrzymujemy

$$S_n = (1 + i)^n C_0.$$

Jeśli po pierwszym, drugim itd. roku zainwestowano dodatkowo $C_1, C_2, \ldots$, to po n latach otrzymujemy

$$S_n = (1+i)^n C_0 + \sum_{i=1}^{n} (1+i)^{n-k} C_k.$$

Wielkość S_n nazywamy **zakumulowaną wartością** (ZW) inwestycji.

Przykład 2. Zamierzamy zrobić następującą inwestycję: zakładamy lokatę 1000 zł, a następnie po dwóch latach dokładamy do niej 2000, a po następnych dwóch latach 1500 zł. Jaka będzie zakumulowana wartość tej inwestycji po 5 latach? Zakładamy, że $i = 5\%$.

Rozwiązanie. Mamy $n = 5$ oraz $C_0 = 1000$, $C_2 = 2000$, $C_4 = 1500$ oraz $C_1 = C_3 = C_5 = 0$. Zatem zgodnie z powyższym wzorem

$$S_5 = 1000 \cdot (1.05)^5 + 2000 \cdot (1.05)^3 + 1500 \cdot (1.05)^1 = 5166,53.$$

Policzmy teraz jaką kwotę x powinniśmy zainwestować, aby po roku otrzymać ustaloną kwotę S_1. Oczywiście

$$x(1+i) = S_1,$$

a więc szukana kwota to

$$x = \frac{1}{1+i} S_1.$$

Liczbę $v = \frac{1}{1+i}$ nazywamy **czynnikiem dyskonta**. Inczej mówiąc, $S_1 v$ jest **obecną wartością** (OW) (wartością w chwili zero) kwoty S_1 osiągalnej po upływie 1 roku. Podobnie kapitał warty S_n po n latach warty jest obecnie $v^n S_n$.

Zauważmy, że $v < 1$, a więc $S_1 v < S_1$ i ogólnie $S_1 < S_2 < \ldots < S_n$ — czas to pieniądz!!!

Obliczmy jeszcze ile jest obecnie warta inwestycja, która daje wypłaty: C_0 obecnie, C_1 po roku, C_2 po dwóch latach, ..., C_n po n-tym roku. Oczywiście C_1 jest warte vC_1, C_2 jest warte $v^2 C_2$, itd, a więc obecna wartość tej inwestycji wynosi

$$C_0 + vC_1 + v^2 C_2 + \ldots + v^n C_n = C_0 + \sum_{k=1}^{n} v^k C_k.$$

Przykład 3. Rozważmy trzy warianty inwestycji przynoszących C_0, C_1 i C_2 w chwilach 0 ,1, i 2 lata przy rocznej stopie procentowej $i = 10\%$.

Wariant	C_0	C_1	C_2
A	100	110	120
B	110	110	110
C	120	110	100

Który z tych wariantów jest najkorzystniejszy dla nas?

Rozwiązanie. Mamy

$$\mathrm{OW} = C_0 + vC_1 + v^2C_2.$$

Zatem

$$\mathrm{OW}(A) = 100 + \frac{1}{1.1}\cdot 110 + \frac{1}{(1.1)^2}\cdot 120 = 299.17.$$

Podobnie

$$\mathrm{OW}(B) = 300.91$$

$$\mathrm{OW}(C) = 302.64$$

Zatem najkorzystniejsza dla nas jest inwestycja C.

Kapitalizacja niezgodna występuje gdy okres kapitalizacji jest mniejszy niż podstawowa jednostka czasu. Po każdym okresie kapitalizacji odsetki doliczane są do kwoty procentującej. Mówi się wtedy o dwóch stopach:

- nominalnej;
- efektywnej.

Przykład 4. Pożyczamy komuś 100 zł na 10% rocznie, ale kapitalizacja następuje co kwartał. Po upływie każdego kwartału zyskujemy $\frac{1}{4}\cdot 10\% = 2.5\%$. Dług rośnie następująco:

$$\begin{array}{rl}
\text{po } 1/4 \text{ roku} & 100\cdot\left(1+\frac{1}{4}\cdot 0.1\right) \\
\text{po } 1/2 \text{ roku} & 100\cdot\left(1+\frac{1}{4}\cdot 0.1\right)^2 \\
\text{po } 3/4 \text{ roku} & 100\cdot\left(1+\frac{1}{4}\cdot 0.1\right)^3 \\
\text{po } 1 \text{ roku} & 100\cdot\left(1+\frac{1}{4}\cdot 0.1\right)^4 = 110.38
\end{array}$$

Wobec tego po roku otrzymujemy zysk 10.38%, a nie 10%.

Stopę 10% nazywamy **nominalną**, a stopę 10.38% **efektywną**. Aby uzyskać efektywnie 10%, stopa nominalna powinna wynosić 9.645%.

Aby **uzgodnić** stopy procentowe w przypadku kapitalizacji niezgodnej oznaczmy przez i stopę efektywną, a przez $i^{(m)}$ stopę nominalną kapitalizowaną m razy w ciągu roku. Po roku obie stopy powinny dać ten sam kapitał, a więc

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m.$$

Stąd

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1,$$

oraz

$$i^{(m)} = m\left((1+i)^{1/m} - 1\right).$$

Kapitalizacja ciągła. Jeżeli $i^{(m)} = \delta$ jest stałe, ale ilość kapitalizacji okresów m rośnie, to rośnie również efektywna stopa zwrotu oraz w granicy mamy

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 = \mathrm{e}^{\delta} - 1,$$

gdzie $\mathrm{e} = 2.781\ldots$.

Wielkość

$$\delta = \log(1+i)$$

nazywamy **siłą stopy procentowej** lub **natężeniem oprocentowania** związanym z efektywną stopą i.

Rozważmy następujący model ciągły: Załóżmy, że w krótkim okresie czasu Δt kapitał przynosi zysk procentowy proporcjonalny do długości tego okresu ze współczynnikiem δ. Tzn. kapitał wart $k(t)$ w chwili t jest warty w chwili $t + \Delta t$

$$k(t+\Delta t) = k(t)\,(1+\delta\Delta t)\,.$$

Odejmując stronami $k(t)$ i dzieląc przez Δt otrzymujemy

$$\frac{k(t+\Delta t)-k(t)}{\Delta t} = \delta k(t),$$

a więc otzrymaliśmy równanie różniczkowe

$$k'(t) = \delta k(t).$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$k(t) = k(0)\mathrm{e}^{\delta t}.$$

Na odwrót, ile jest wart obecnie kapitał warty $k(t)$ w chwili t?. Rozwiązując równanie

$$k(t) = x\mathrm{e}^{\delta t}$$

dostajemy

$$x = k(t)\mathrm{e}^{-\delta t}.$$

Przykład 5. Pożyczamy komuś 100 zł przy stopie efektywnej $i = 10\%$. Zatem $\delta = \log(1+i) = 0.09531$. Po okresie $2/3$ roku ZW wyniesie

$$100\cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\delta} = 106.56,$$

a obecna wartość kapitału wartego 100 zł w chwili $2/3$ roku wynosi

$$100\cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\delta} = 93.84.$$

Przykład 6. Po jakim czasie zwiększymy swój kapitał k-krotnie przy efektywnej stopie i? Mamy

$$(1+i)^t = k$$

a więc

$$t = \frac{\log k}{\log(1+i)} = \frac{1}{\delta}\log k.$$

Na przykład, jeśli $i = 10\%$, to dla $k = 2$ mamy $t = 7.27$ lat, a dla $k = 10$ mamy $t = 24.16$ lat.

Jeśli δ nie jest stałe, a zależy od t, tzn. mamy funkcję $\delta(t)$ zwaną **chwilowym natężeniem oprocentowania**. Rozumując podobnie jak wyżej dostajemy równanie

$$k'(t) = \delta(t)k(t),$$

którego rozwiązaniem jest

$$k(t) = k(0)\exp\left(\int_0^t \delta(s)ds\right).$$

Obecna wartość kapitału wartego $k(t)$ w chwili t wynosi

$$k(t)\exp\left(-\int_0^t \delta(s)ds\right).$$

Procent z góry. Załóżmy, że roczna stopa procentowa wynosi i. Inwestujemy pewną kwotę C_0 i chcemy otrzymać *natychmiast* pewną jej część (powiedzmy C_0d), a po roku całą kwotę C_0. Jak uzgodnić d ze stopą i?

Jeśli procent płatny po roku wynosi C_0i, to procent z góry powinien być jego obecną wartością

$$C_0d = C_0iv.$$

Zatem

$$d = iv = \frac{i}{i+1}.$$

Wielkość d nazywamy **stopą procentową z góry**.

Inaczej można rozumować tak: Otrzymany z góry zysk C_0d można z powrotem zainwestować na takich samych zasadach, tzn. odbierając C_0d^2 teraz, a po roku C_0d. To samo możemy zrobić z C_0d^2 itd. Zatem po roku odbierzemy

$$C_0 + C_0d + C_0d^2 + \ldots = \frac{C_0}{1-d}.$$

Jeśli ta inwestycja ma być równoważna z inwestycją oprocentowaną z dołu na i, to musimy mieć

$$\frac{1}{1-d} = 1+i,$$

a więc znowu

$$d = \frac{i}{i+1}.$$

Przy kapitalizacji m razy w ciągu roku nominalna stopa z góry wynosi

$$d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1 + \frac{i^{(m)}}{m}}.$$